ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

TOMO C

Segundo semestre de 1925

BUENOS AIRES
IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
684 — CALLE PERÚ — 684

1925

NOMENCLATURA ANTROPOTASSICA

POR EL DOCTOR GUIDO BONARELLI

La nomenclatura zoologica, come quella botanica, è, come tutti sanno, binomiale, facendosi seguire il nome della *specie* a quello del *genere*. Quando peraltro sia da considerare una *varietà,* si aggiunge opportunamente, al binomio, un terzo termine, avendosi così, in definitiva, una nomenclatura trinomiale.

Limitatamente ai bisogni della zoologia, questa nomenclatura è applicabile anche all'uomo. Quando infatti lo si consideri zoologicamente, come una specie qualunque del regno animale, per la sua identificazione sarà più che sufficiente il solito binomio :

Homo sapiens Linneo (1758) [= *typ.* gen.]

Non vogliamo peraltro dimenticare che molti generi, in biologia sistematica, vengono suddivisi in sottogeneri. In simili casi, si fa seguire fra parentesi, al nome generico, quello del sottogenere. Anche per gli Ominidi possiamo ammettere due sottogeneri (1) secondo il seguente schema :

gen. *Homo* Linneo (1758).
sottogen. *Anthropus* (Auct.).
[holotyp. = *Homo sapiens* Linn.].
sottogen. *Protanthropus* Haeckel
[plesiotyp. = *Homo neanderthalensis* King.

(1) Modificando mie precedenti vedute (G. BONARELLI, *La mandibola humana de Bañolas,* in *Physis,* tomo II, Buenos Aires, 1916), ho già espresso l'opinione (G. BONARELLI, *Alcune questioni d'antropologia sistematica,* in *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* t. LXXXVI, Buenos Aires, 1918, pagine 15-16 dell'estr.) che

L'uomo attuale appartenendo al primo dei due sottogeneri, avremo dunque :

Homo (Anthropus) sapiens (Linn.)

E la più parte degli zoologi ne avrá con questo abbastanza, quantunque valga la pena di ricordare che, fin dai primordi della zoologia sistematica, sono state riconosciute alla specie umana un certo numero di «varietà».

Soffermiamoci anzi su questo punto, onde accennare ad un fatto per me importantissimo. Le prime classificazioni antropologiche sono dovute in genere a naturalisti e noi vediamo che la maggior parte di costoro, nel distinguere le «varietà» umane, non sentirono affatto la necessità di decampare dalle solite norme le quali consistono nel fondare le distinzioni sul maggior numero possibile di caratteri peculiari a ciascun tipo e nell'adottare *di preferenza,* per le singole «varietà», altrettante denominazioni desunte dal loro *habitat* (1).

Qual consistenza avessero in realtà codeste prime classificazioni, lo si desume facilmente dal fatto che, nelle «varietà» istituite da Linneo (1758) e dal Blumenbach (1775), anche le più recenti classificazioni umane (escluse naturalmente le cervellotiche) riconoscono — sia pure attraverso una fioritura antipatica d'ingombranti sinonimi — altrettanti gruppi sobolici ben definiti. Certo, se al tempo di Linneo le conoscenze antropogeografiche fossero state più progredite, il sommo naturalista non avrebbe avuto difficoltà a preferire, per le razze melanoderme, la denominazione di varietà *afro-oceanica.* In ogni caso, dobbiamo a lui se nel vasto gruppo dei melanodermi, per quanto in realtà abbastanza complesso, si siano intravveduti, fin dal principio, non dubbi legami di affinità o parentela. Non altrettanto possiamo noi dire della linneana varietà *europaea* che pur vediamo conservata anche al presente nel maggior numero delle classificazioni; cosa che siamo disposti a fare anche noi purchè si sottintenda che questa

il genere *Eoanthropus* Sm. Woodw, possa considerarsi sinomimo del mio gr. sobol. *Prinanthropus* (1909). L'uomo di Piltdown potrebbe rappresentare un tipo protomorfo di questo gruppo.

(1) Il bello è questo : che da un secolo e mezzo si sta facendo della zoologia sistematica senza che si sia sentito il bisogno di deviare dalle norme linneane, mentre negli ultimi 50 anni di attività, da parte degli antropologi, le questioni tassinomiche, abbordate da molti con petulante leggerezza, o smania di novità, o quale mezzo dimostrativo, costituirono la piattaforma delle più discordanti e sconclusionate accademie.

varietà, ben lungi dall'essere omogenea, è piuttosto formata da popoli misti *(Hesperomixanthropus)*.

Al tempo di Blumenbach la geografia antropica era già un poco più progredita e così alle quattro «varietà» umane riconosciute da Linneo *(afer, americanus, asiaticus, europaeus)*, il Blumenbach poteva aggiungere una quinta varietà : la *malayensis* che meglio avrebbe potuto chiamare : *malayo-polynesiaca.* Ad ogni modo, dal Blumenbach in poi — e per quasi un centennio — la sua classificazione venne su per giù mantenuta e passò a formar parte delle nozioni scolastiche più in voga, figurando in tutti i trattati di storia naturale.

Ma doveva pur giungere quel certo giorno in cui la storia naturale dell'uomo cominciò ad acquistare una certa autonomia, nell'ámbito degli studi zoologici, per diventare poco a poco una disciplina a parte, coltivata da un certo numero di appassionati studiosi (1). Così sorse l'antropologia; così domani potrebbero prender corpo altrettante discipline simili, dedicate allo studio particolare di singole specie animali e vegetali; così, assieme agli studi antropologici, ebbe inizio, di pari passo, la zootecnia e non soltanto la zootecnia pratica, ma la teorica : quella appunto che studia gli animali domestici con intenti puramente scientifici o naturalistici.

Una prima constatazione di fatto, da parte dei primi antropologi, fu appunto che nella specie umana vivente, oltre alle «varietà» principali o gruppi sobolici (2) — ed eventuali sottogruppi, — si debbono considerare le «sottovarietà» o vere razze, essendo possibile in certe razze la identificazione d'un certo numero di sottorazze (3), precisa-

(1) Fra i quali dobbiamo annoverare una percentuale non indifferente de archeologi, di paletnologi, di letterati, di filosofi, ecc.; tutte bravissime persone — di questo non v'ha dubbio — ma sprovvedute, nel maggior numero dei casi, d'un sufficiente preventivo corredo di nozioni biologiche; eppure, le abbiamo viste affrontare con invidiable coraggio i problemi fondamentali (non esclusi i tassinomici!) della nuova disciplina *eminentemente biologica!*

(2) «Sobólico» aggettivo da *sóboles* latino = razza. Altri adoprano al suo posto l'aggettivo «raziale» (da razza!) il che, in grammatica, è (se non erro) un idiotismo.

(3) I primi tentativi antropotassici degni di essere presi in considerazione sono quelli di Geoffroy Saint-Hilaire (1861) e di Huxley (1870), ossia di due veri naturalisti, i quali conservarono le vecchie varietà linneane e blumenbachiane fin dove sembrò loro possibile. La mayor divergenza si ebbe nel fatto che i due citati studiosi riunirono gli americani, gli asiatici e i malesoidi in un solo gruppo, mentre al contrario, per il gruppo dei melanodermi, ritennero necessario, ciascuno a suo modo, di stabilire due differenti gruppi sobolici. Questione, como si vede, di

mente come avviene nelle specie addomesticate; — razze e sottorazze che con la semplice nomenclatura zoologica non si avrebbe modo di identificare *con altrettante particolari denominazioni* ispirate a criteri d'una certa uniformità e che trovino favorevole accoglienza nella famiglia internazionale degli studiosi.

Per i poligenisti una simile preoccupazione non esiste; essi in realtà, nonchè affrontarla, hanno creduto di eluderla e sappiamo in qual modo: le nostre razze e sottorazze son diventate per loro ... quasi altrettante specie! Noi li crediamo assolutamnnte in buona fede e perciò non protesteremo. Siamo piuttosto meno disposti a tolleranza verso certi monogenisti che con la speciosa innovazione delle specie »collettive» e delle specie «elementari» non altro risultato hanno ottenuto, evidentemente, che quello di aggiungere un neologismo di più

apprezzamenti personali che non determinarono, in ogni caso, un grande spostamento o, peggio oncora, un vero e proprio sovvertimento, nel campo di queste ricerche.

E allora, ci si domanderà, come e quando s'iniziò quel certo guazzabuglio al quale si è più sopra accennato? Oh! è subito detto : il guazzabuglio cominciò con il Topinard (1878) quando cioè s'incominciarono ad architettare delle classificazioni in cui la distinzione dei gruppi veniva fondata, con criteri del tutto arbitrari, sopra un solo carattere o sopra un numero troppo esiguo di caratteri non sempre adequati alle funzioni discriminative che venivano loro assegnate. Il Topinard cominciò col dividere l'umanità in gruppi a seconda dei differenti tipi di capigliatura e ne venne fuori una classificazione in cui Biondi d'Europa y Celtoslavi figuravano a braccetto degli Australiani e dei Fulbé! Ma la cosa non andava e se ne accorse lo stesso Topinard che dopo soli sette anni (1885) dava alla luce una seconda classificazione, fondata questa volta sull'indice nasale (!), nella quale, in connubi ancor più stridenti, vediamo gli eschimesi figurare fra i mesorini e tutte le razze «bianche» fra i leptorini, mentre i melanodermi, nessuno escluso, son tutti accantonati nel gruppo dei platirrini!

E chè dire delle classificazioni posteriori? Questo soltanto : che mentre l'anpologia generale progrediva a grandi passi realizzando vere e proprie conquiste, la sistematica si addentrava sempre più nel dedalo infido del più deplorevole confusionismo.

La data del 1889 doveva segnare un progresso reale nel campo di queste indagini dopo che, specialmente per opera del De Quatrefages, veniva riconosciuta, per certi gruppi sobolici, una origine metamorfa; ma lo stesso De Quatrefages, nella sua classificazione, ne faceva a nostro avviso una erronea applicazione collocando gli «ariani» *(sensu latu)* e gl'indo-cinesi fra le razze «pure» e fra le miste tutti gli americani !

Altro progresso reale nel campo antropologico doveva iniziarsi fin da quando si incominciò a riconoscere nelle diverse razze umane, considerate nei loro reciproci rapporti di affinità e di possibile parentela, ma certa situazione gerarchica delle une rispetto alle altre, ammettendosi giustamente il concetto che alcune di

al bagaglio farraginoso della terminologia sistematica (1). Si lascino, per carità, le cose come sono, sia pure in attesa che da unanimi consensi ed alla luce di nuovi indirizzi — e più vasti orizzonti — si provveda, se del caso, a quelle modifiche di nomenclatura che il tempo e la paglia dimostrassero veramente opportune e non soltanto fomentate da oziose disquisizioni di lana caprina.

Noi, ritornando all'argomento, diremo: — che l'antropologia comincia dove la zoologia dell'uomo finisce; — che la zoologia determina la posizione del gruppo umano nel regno animale, ne identifica le varietà principali e non disdegna la collaborazione degli antropologi competenti in tutte quelle ricerche anatomo-morfologiche, filogenetiche, si-

esse rappresentino i residui di tipi protomorfi poco evoluti, che in altre il processo evolutivo abbia favorita al massimo la loro specializzazione in tipi arcimorfi, non escludendosi infine che altri tipi sobolici abbiano origine metamorfa; mah! quali frutti portarono questi concetti, per quanto giustissimi, nel campo delle indagini antropotassiche? Ce lo dicono le classificazioni del Fritsch, dello Stratz e dei loro seguaci, nelle quali, in prima linea, si presenta un gruppo protomorfo che invece d'essere, come logicamente doveva supporsi, ristretto ed omogeneo, risulta il più complicato, artificioso e numeroso, comprendendosi in esso, in unione con tipi negroidi, australoidi e proto-eranoidi (Ainos!), *tutte* le razze americane! Né a questo soltanto dovevano limitarsi le incongruenze maggiori, chè in dette classificazioni vediamo fatte le più arbitrarie ed inverosimil distinzioni fra tipi arcimorfi e metamorfi!

Iniziatasi a questo modo la decadenza, o barocchismo, della Tassinomia antropologica, si direbbe che tutto abbia congiurato per sospingerla sempre più verso la china di Babilonia. E basterà qui ricordare, tanto per chiudere la chiosa, l'intervento nefasto dei signori poligenisti in quest'opera di impasticciamento.

(1) La morte improvvisa del Giuffrida Ruggeri mi dissuase dal pubblicare un esame critico della sua più recente classificazione antropologica (1913, *L'uomo attuale; una specie collettiva*, Roma, «Dante Alighieri», p. 154-156) attorno alla quale m'ero venuto occupando già da parecchio tempo. L'intonazione vivacemente polemica e talvolta satirica di codesto mio lavoretto non avrebbe certamente, lui vivo, urtato o ferito le squisite suscettibilità della sua tempra battagliera e imperterrita. Oggi potrebbe suonare irriverenza alla memoria di chi, più che maestro, volle essermi spontaneamente amico sincero e consigliere benevolo. Con tutto ciò intendo chiarire il perchè detto esame critico, preannunciato in altro lavoro, non sarà mai pubblicato, limitandomi per il momento a dichiarare che la classificazione antropologica del Giuffrida Ruggeri è ritenuta da me, per molte ragioni di forma e di sostanza, assolutamente inaccettabile. Queste ragioni esporrò mano a mano che si presenti l'occasione. Come impressione generale rileverò fin da ora che detta classificazione, nonchè apparire quale sintesi geniale della già vasta mole di lavoro compiuto dal Giuffrida Ruggeri, nel campo antropologico, si direbbe piuttosto raffazzonata sotto il malefico influsso di qualche pseudoantropologo non biologo.

stematiche, attinenti alle loro indagini; — che d'altra parte, l'antropologia pr. d., come storia naturale o *monografia speciale dell'uomo,* estende ed amplifica quelle ricerche nell'ámbito esclusivo dell'uman genere onde stabilire, con analoghi criteri, i rapporti di affinità, di parentela, di gerarchia che intercedono fra i diversi aggruppamenti sobolici in cui l'umanità può venire suddivisa. Ora, come in zoologia — per meglio facilitare le indagini sistematiche — s'è adottata una speciale nomenclatura (bi-trinomiale) per la identificazione delle specie e loro possibili varietà, così non potrà negarsi agli antropologi il pieno diritto di istituire una nomenclatura colla quale, per comodità di studio, sia resa possibile la identificazione più o meno esatta delle singole razze e sottorazze umane. E siccome ciò si è già fatto (e da molti), ma con apprezzamenti individuali e senza regole fisse, crediamo giunto il momento di porre un argine al dilagare di queste iniziative slegate ed isolate, invocando, da parte di tutti, la osservanza d'un certo numero di capisaldi o norme di nomenclatura che potrebbero entrare in vigore dopo opportuna sanzione da parte di qualche congresso internazionale, precisamente come si è fatto in botanica, in zoologia, in paleontologia. Se in questi grandi rami della storia naturale è stato più o meno facile vederci chiaro, senza molto tergiversare, fra le migliaia e migliaia di generi, di specie, di varietà (e questo in grazia d'una uniforme terminologia); a maggior ragione è da sperare che per mettere a posto una quarantina di razze umane (poco più poco meno, a seconda degli autori) sarà di molto agevolata l'opera nostra, per quanto ardua, se riusciremo a trovarci d'accordo su alcuni particolari che in apparenza sono di pura forma, mentre in realtà influiscono profondamente sulla sostanza.

Ben lungi dal pretendere, ma non senza una vaga speranza che vengano presi in benevola considerazione (per lo meno da quegli studiosi che non siano già legati a preconcetti o a partiti presi), faremo qui una breve rassegna dei criteri ai quali ci siamo finora attenuti il più strettamente possibile, in quest'ordine di ricerche.

Noi riteniamo che, in antropologia sistematica, per la identificazione d'una razza sia sufficiente *un binomio in cui al nome stesso della razza si faccia precedere quello della «varietà» umana o vogliamo dire del gruppo sobolico a cui la razza appartiene.* Già lo sappiamo che l'antropologia studia l'*uomo* e che le razze in essa considerate appartengono alla specie umana; trovo per tanto superfluo ed ingombrante che al nominare ciascuna singola razza si continuino a ripetere, volta per volta, i due termini generico e specifico coi quali, fin dal tempo di

Linneo, detta specie venne identificata. Questa superfluità riscontriamo, per esempio, nella classificazione del Giuffrida Ruggeri (1) laddove, per citare un sol caso, i negrilli d'Affrica (Akka, Ba-Binga) si occultano nella intricata compagine della seguente chilometrica denominazione:

Homo sapiens pigmaeus africanus pilosus

Nella quale quello che manca è precisamente il nome della razza cui si vuole alludere. Coll'aggiunta di questo nome s'arriverebbe ad una nomenclatura esanomiale nella quale i due primi termini, per lo meno, sono superflui e possono benissimo venire eliminati in quanto *dobbiamo logicamente sottintenderli.*

Abbiamo detto adunque che il primo termine del binomio dovrebbe indicare il gruppo sobolico a cui la razza appartiene. Ma qui ci troviamo di fronte ad una prima difficoltà. Questa prima difficoltà (determinata dalla nostra preoccupazione di rispettare scrupolosamente il *diritto di priorità)* consiste nel fatto che le cinque «varietà» riconosciute dagli zoologi nella specie umana — e che non pochi antropologi hanno accettato, tali e quali, come altrettante varietà principali, o gruppi sobolici, nelle loro classificazioni — vennero fin dal principio identificate con altrettanti *aggettivi.*

Ora, siccome il binomio da noi proposto per designare le razze umane non può cominciare con un aggettivo, noi dobbiamo *per necessità* fare uno strappo a quel certo diritto di priorità (o meglio, *renderci indipendenti del tutto dalla nomenclatura zoologica)* e sostituire gli aggettivi linneani e blumenbachiani con altrettanti *sostantivi.*

Questo si è fatto nella nostra classificazione (1909) adottando una terminologia il più possibile significativa, quantunque male interpretata da chi (2), travisando il valore effettivo dei singoli radicali e trascurando di tener conto degli schiarimenti da noi forniti, ci fece responsabili di ritenere, per esempio, che tutti i prinantropici fossero dei protomorfi (3)!

(1) *L'uomo attuale*, pagine 154-156.

(2) E. MORSELLI, *Lezioni*, ecc., pagina 1221, Torino, 1911.

(3) Il che fu ben lungi dal mio pensiero! E dubito molto che nell'esprimere un simile giudizio, il Morselli, più che ad una impressione personale, siasi ispirato, ritenendola imparziale e fidedigna, a certa critica (!) grossolana e triviale con cui si pretese affondare nel ridicolo il mio tentativo antropotassico. Sta il fatto che il criterio informativo delle mie «mutazioni» (e così le abbiamo chiamate fin dal

Specie **Homo sapiens** L.

Varietà principali o gruppi sobolici

Linneo	Blumenbach	Bonarelli
a) afer	var. *aethiopica*	= *Prinanthropus* (1)
b) americanus	var. *americana*	= *Eitanthropus* (2)
c) asiaticus	var. *mongolica*	= *Telanthropus* (3)
	var. *malayensis*	= *Heomixanthropus*
d) europaeus	var. *caucasica*	= *Hesperomixanthropus*

Nei vari gruppi sobolici, ma specialmente nel prinantropico, che di tutti è il più complesso, sono da considerare alcuni *sottogruppi* ed i termini corrispondenti destinati a designarli potranno venire intercalati, fra parentesi, al solito binomio.

principio avendo incluso il fattore *tempo* fra gli elementi di giudizio invocati per individuare i singoli *tipi)* è cronologico sino ad un certo punto e soprattutto implica, *non esclude*, la opportunità di considerare svariati processi evolutivi (in seno a *ciascuno* dei singoli *gruppi)* con formazione *successiva*, più o meno *indipendente*, di tipi paleomorfi, arcimorfi, metamorfi e mixomorfi.

a) Il gruppo *Prinanthropus* venne da me così chiamato perchè ne formano parte certi tipi *subnegroidi* (altri al posto di questi mettono gli australiani) fra i quali ravvisiamo le forme più affini ai possibili protomorfi della intera umanità. Ma del medesimo gruppo formano parte altri tipi che non sono protomorfi, bensì rappresentano derivazioni successive (e più o meno polifiletiche) dai tipi protomorfi, fino ad aversi veri tipi arcimorfi.

b) Nel gruppo *Eitanthropus* si affidavano ai *primitivi* eschimesi innuitici le funzioni di tipo protomorfo dal quale sarebbero derivati tutti gli americani paleomorfi ed arcimorfi; funzioni che, forse, sono piuttosto da attribuire, più direttamente, al tipo umano di Cro-Magnon [*Eitanthropus spelaeus* (Lapouge)]. Ma gli innuiti non sono certamente così «antichi» quanto i subnegroidi; anzi, attraverso il tipo magdaleniano della Chancelade, loro stretto parente, mi sembrò di poterli avvicinare a *primitive* stirpi «camitiche» del sottogruppo prinantropico australoide (Huxley) che non sono certamente protomorfe, come non è protomorfo il tipo di Cro-Magnon, al confronto dei subnegroidi (o, se si vuole, degli australiani, pr. d.).

c) L'umanità «eurasica» *(s. str.)* venne da me compresa nel gruppo *Telanthropus*. Attraverso i paleasiatici, considerammo come più affini al possibile prototipo di questo gruppo gli attuali eschimesi occidentali che di fronte agli orientali ci apparvero evidentemente meno «antichi», potendosi anzi ammettere, per non poche considerazioni che a sua volta esporremo, la loro derivazione, più o meno diretta, da un primitivo tipo innuitico. Anche nel gruppo telantropico abbiamo dunque veri tipi protomorfi, oltrechè paleomorfi ed arcimorfi.

(1) Dal greco = uomo [venuto, o formatosi] prima.

(2) Dal greco = uomo [venuto, o formatosi] dopo.

(3) Dal greco = uomo [venuto, o formatosi] per ultimo.

Esempio :

Prinanthropus (negroides) sudanensis mihi.

Questi termini potranno essere, indifferentemente, sostantivi ed aggettivi.

Altrettanto si dica dei termini destinati a designare le singole razze e sottorazze.

Esempi :

Eitanthropus (eskimoides) innuiticus mihi,
Prinanthropus (subnegroides) namasan mihi,

dovendosi cercare sopra tutto che questi termini siano tratti di preferenza dal nome con cui ciascun tipo è più conosciuto o da qualche peculiare caratteristica che più nettamente lo distingua (1).

Tutto ciò, ben inteso, nel caso in cui le singole razze e sottorazze non abbiano già avuto da altri una speciale denominazione latina perchè altrimenti, per diritto di priorità (2), questa denominazione, *anche*

(1) A questo proposito, sono da fare i seguenti appunti alla classificazione del Giuffrida Ruggeri *(op. cit.)*. Egli divide gli australiani in due «subvarietà» (che per noi sarebbero sottorazze) fondate sulla forma del cranio. Invece, seguendo i più autorevoli studiosi che si occuparono seriamente degli australiani, dobbiamo concludere che la ipsistenocefalia caratterizza appunto il vero tipo australiano (quantunque non sia carattere esclusivo di questo tipo, d'onde a nostro avviso l'errore d'averlo chiamato con il corrispondente aggettivo), mentre la platicefalia pseudoneanderthaloide devesi ritenere come realizzatasi in tipi misti australo-tasmaniani.

Colla denominazione : *H. S. pigmaeus* (!) *steatopygus*, il Giuffrida Ruggeri vuol designare i Boscimano-Ottentotti *(Namasan)* dopo avere escluso che la steatopigia sia loro carattere *esclusivo*. E allora, non è un carattere che li identifichi!

Vediamo inoltre adottati gli aggettivi : *brachimorphus* e *dolicomorphus* per le due «varietà» dell'*H. S. europaeus ;* ma certamente (o più correttamente!) il Giuffrida Ruggeri intendeva parlare di *brachicephalus* e *dolicocephalus*. Di quest'ultima «varietà» formerebbe parte una «subvarietà» *nordicus :* ma nel nord [dell'Europa], oltre ai teuto-scandinavi, abbiamo i celti, i lapponi, i finni, gli slavi, i samoiedi!...

(2) Questo diritto di priorità, riconosciuto e scrupolosamente osservato negli altri rami della biologia sistematica, potrà sembrare ai superuomini dell'antropologia babilonica un mezzuccio semplicistico degno magari della loro compassione più o meno sdegnosa. Noi che non siamo superuomini, ma che abbiamo una certa esperienza in materia di sistematica, sappiamo invece che questo diritto di priorità è stato precisamente il fulcro, la chiave di volta, il *punctum saliens*, tra le norme di nomenclatura che hanno salvato dal confusionismo le classificazioni zoologiche e botaniche. E al sorriso di compassione dei superuomini risponderemo con un eguale sorriso.

se impropria, e poco grammaticale, dovrà essere rispettata. Che se poi, invece di una, ci trovassimo di fronte ad un certo numero di denominazioni applicate da vari autori *al medesimo tipo,* dovremo adottare quella denominazione con cui, *per la prima volta,* il tipo in quistione venne identificato.

Questa ricerca della priorità è lavoro da certosino che molti disdegneranno in vista delle assai limitate soddisfazioni che esso procura, ma che pur dovrà farsi ed al quale non siamo alieni dal portare, in un prossimo avvenire, il modestissimo contributo delle nostre conoscenze in materia. Sarebbe bene, in ogni caso, che l'impresa allettasse un certo numero di volenterosi fra i quali dovrebbero correre frequenti e cordiali intese col proposito di uniformarsi a un certo numero di criteri comuni in modo da costituire una specie di «commissione internazionale per la nomenclatura antropotassica». Tanto meglio se un simile ente e soprattutto i resultati concreti del suo lavoro ricevessero a suo tempo, opportuna sanzione in seno a qualche congresso.

I vantaggi reali che se ne possono attendere compenseranno ad usura lo sforzo dei volenterosi. Si otterrà, anzitutto, la *unificazione della nomenclatura* ed il genio inventivo di tutti coloro che ritengono, in buona fede, di servire alla scienza cambiando continuamente i nomi alle cose (fabbricanti a tutto spiano di parole destinate alla vita effimera d'un *mot d'esprit,* o d'un cappello alla moda), trovandosi così d'un tratto senza lavoro, potrà dedicarsi con maggior profitto ad altre speculazioni.

Siccome poi la priorità si estende dal nome della cosa al suo valore concreto, sarà reso finalmente, in proporzione ai meriti di ciascuno, il doveroso omaggio ai *veri* artefici del progresso antropologico.

Le norme sopra indicate — ed altre di minor momento — dovrebbero formare, a nostro avviso, un *corpus juris* applicabile, in genere, non solamente alla specie umana, bensì, lo abbiam già detto, allo studio sistematico e *monografico* di singole specie *polimorfe* (vegetali ed animali); soprattutto delle specie animali domestiche che con la umana dividono precisamente il carattere d'un estremo polimorfismo. Il che no toglie che si tratti di vere «specie», nel senso zoologico della parola (1) — e che il loro polimorfismo sia dovuto, sopra tutto, alla *domesticità.*

(1) Parlo, naturalmente, da monogenista a monogenisti, pur prevedendo che alcuni di costoro (sono costretto a rilevarlo con una certa amarezza, più che sor-

presa, giacchè agli effetti disastrosi della pedante ossessione ipercritica, nel campo scientifico, ho già fatto l'abitudine), troveranno a ridire anche su queste lapalissiane verità e cavillando e sofisticando (dove si vede che non per tutti il tempo è denaro), s'attaccheranno a qualsiasi appiglio per ridurre il più evidente assioma ad una «dogmatica» *presunzione*. È da sperare che questi egregi signori non giungeranno all'estremo di invocare la tesi poligenista a sostegno delle loro riserve, perchè altrimenti, essendo essi monogenisti, sarà il caso di domandarsi dove sia andata a finire la loro «coerenza» (parola che dice *molto*, ma che in questo caso non dice *tutto*).

Senza discussione e senza critica non si avrá mai progresso scientifico, ma sappiamo puranco che ponderazione, opportunità e soprattutto logica, sono attributi indispensabili dell'una e dell'altra.

EL MISTERIO DE LAS DISTANCIAS PLANETARIAS

Por el ingeniero OTTOMAR SCHMIEDEL

El estudio de la evolución espiritual de los pueblos primitivos revela que la maravilla del cielo estrellado ha sido, desde muy temprano, el objeto de su atención.

Muy pronto el hombre se fijó que había estrellas, que cambiaban poco a poco su lugar entre las otras, y que las estrellas caminantes entre sí se distinguieron por diferentes movimientos. Estos movimientos en relación al movimiento de toda la cúpula celeste, con el inmenso número de astros, han sido un gran misterio para el hombre, y su imaginación buscó continuamente explicárselo.

Ignorando todavía los principios que regían en el Universo, acostumbrado, al contrario, a juzgar todo bajo el punto de vista de las experiencias adquiridas, no es extraño que el hombre supuso para todo esto un verdadero *mecanismo de rotación,* imaginándose para cada uno de los planetas una esfera sólida, transparente y movible, la que tendría que sostener al planeta correspondiente.

Todas las esferas con sus correspondientes planetas estarían movidas por un mecanismo real y tendrían que producir, por su movimiento, sonidos armónicos, lo que se ha llamado la *música de las esferas.*

Esta idea antiquísima es, en el fondo, tal vez la exteriorización más hermosa del espíritu sobre su propia pertenencia a aquello que abarcamos y concretamos en el concepto: creación.

Tanto más notable aparece esto, cuando en realidad los espíritus más elevados se resistieron a aceptar la idea de esferas sólidas y transparentes y de mecanismos verdaderos de rotación, mientras que,

al contrario, la intuición de algo armónico en la creación en general dominó siempre.

Tal es así que ya Pitágoras, hacen aproximadamente 2500 años, supuso como causa del movimiento de los cuerpos celestes un *Principio del Universo,* que obrara desde el *Centro* a través del espacio por una *Ley de la armonía y de los números.*

Esta ley adivinada de la armonía y de los números, desconocida hasta ahora, ha ocupado siempre a los hombres de la ciencia, y mientras que una parte de ellos niega su existencia, por cuanto se ignora sus fundamentos, la otra parte la admite desde que sus indicios se repiten en diferentes casos.

En el año 1766, el profesor Titius, en Wittenberge (Alemania), estableció una serie que da con suficiente exactitud las distancias medias de los planetas al sol, relacionadas a la distancia Sol-Tierra como unidad.

La fórmula establecida fué divulgada más tarde por Bode y se la conoce generalmente como la de Bode-Titius bajo la forma:

$$d_m = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n,$$

en que n acepta, en el orden numérico, los valores

0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

El cuadro siguiente da las distancias reales de los planetas al Sol, sus valores relacionados a la unidad de las distancias (Sol-Tierra) y los valores correspondientes calculados por medio de la fórmula de Bode-Titius, exponiendo al mismo tiempo las diferencias que resultan entre los valores obtenidos por la aplicación de la fórmula y las distancias reales.

Resalta a la vista que la fórmula da efectivamente distancias, que concuerdan muy bien con las reales, con la excepción de la de Neptuno, en que existe una diferencia algo notable.

Planetas	Distancia al sol en millones de kilómetros	Distancia en relación a la unidad (Sol-Tierra)		Diferencia entre la distancia real y la calculada
		Observada	Calculada $(0,4 + 0,3 \cdot 2^n)$	
Mercurio......	58,3	0,39	0,40	+0,01
Venus........	107,7	0,72	0,70	—0,02
Tierra........	149,5	1,00	1,00	—
Marte........	227,0	1,52	1,60	+0,08
Asteroides.....	224 a 644 (media : 434)	media : 2,90	2,80	—0,10
Júpiter........	777	5,20	5,20	—
Saturno.......	1418	9,50	10,00	+0,50
Urano........	2869	19,19	19,60	+0,41
Neptuno......	4495	30,07	38,80	+8,73

Tenemos que observar, sin embargo, que la distancia para Mercurio fué calculada a base de

$$0,3 \cdot 2^n = 0,$$

vale decir, para $n = -\infty$.

El exponente n sigue luego el orden

$$-\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \text{etc.},$$

mientras que, lógicamente, el orden numérico debería ser

$$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \text{etc.},$$

con el que se obtendría para 2^n la progresión geométrica

$$\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \text{etc.}$$

La distancia calculada con la fórmula de Bode-Titius tendría que presentarse luego para Mercurio con el valor

$$0,4 + 0,3 \cdot 2^{-1} = 0,4 + \frac{0,3}{2} = 0,55,$$

en vez de 0,4, de modo que también en Mercurio existe en realidad una diferencia relativamente considerable entre la distancia calculada con la fórmula y la observada.

Las diferencias mencionadas no son, sin embargo, suficientes para desconocer el carácter de una progresión pronunciada existente entre las distancias planetarias.

Aun cuando no se conozca ninguna causa científica para la supuesta existencia de una ley, que vemos traslucir por el orden de las distancias, tendría que reconocerse su acción, si la misma singularidad en el orden de distancias se repitiera con referencia a los satélites de los planetas.

Es de prevenir, sin embargo, que no debe esperarse una coincidencia absoluta, pues por un lado ha de admitirse el efecto de perturbaciones que hayan podido obrar en el pasado, durante el inmenso tiempo transcurrido en la cosmogenia, y por otro lado debe contarse con la existencia de cuerpos cósmicos incorporados al sistema planetario en manera análoga como fueron incorporados o capturados los cometas periódicos.

Las distancias de satélites, incorporados casualmente al sistema, no pueden encuadrar, como se comprende, en una ley supuesta de distancias, la que sólo puede abarcar los satélites considerados como resultados de una evolución.

En nuestro sistema solar tenemos tres planetas, que por el número de sus satélites permiten un estudio al respecto. Son los planetas Júpiter con nueve satélites, Saturno con diez y Urano con cuatro.

De los nueve satélites de Júpiter no se nos presentan sino los cuatro mayores (I, II, III, IV) con marcado carácter de evolución. Tal vez podría incluirse todavía en este grupo el quinto, que es el más cercano a Júpiter, mientras que los otros, los exteriores, por muchas circunstancias alimentan la idea de ser satélites incorporados al sistema ya desarrollado.

Razones para tal suposición son, a más de las inmensas distancias en que giran alrededor de Júpiter, las diferencias con que se presentan sus órbitas en comparación a las de los cinco interiores.

Mientras, por ejemplo, las órbitas de éstos tienen una inclinación contra el plano de la eclíptica, que vacila poco alrededor de 2° angulares, la órbita del sexto satélite está inclinada 28° contra la eclíptica, la del séptimo satélite 31° y la del octavo 149°. La proyección del movimiento del octavo satélite sobre el plano de la eclíptica da un movimiento retrógrado, vale decir de este a oeste, o sea contrario al movimiento general en el sistema planetario. El octavo satélite gira alrededor de Júpiter en una órbita muy excéntrica a una distancia media de 23,8 millones de kilómetros. La distancia del noveno satélite es aproximadamente de 25 millones de kilómetros.

Un cálculo relativamente fácil evidencia que estos dos satélites, en sus posiciones entre Sol y Júpiter, están muy cerca del punto de

equilibrio, que resulta de las dos fuerzas de atracción, de modo que no es nada extraño suponer en ellos satélites incorporados, que en otros tiempos tal vez hayan pertenecido al inmenso enjambre de asteroides que llenan el espacio entre Marte y Júpiter. Esta suposición puede abarcar también los satélites VI y VII, cuyos tamaños son tan reducidos que no ha sido posible, hasta ahora, determinar los diámetros.

Se estima el diámetro del sexto satélite en 120 kilómetros y el del séptimo en, aproximadamente, 50 kilómetros. El octavo satélite y el noveno son, a sus veces, tan insignificantes que no se ha podido comprobar la existencia de ellos sino por medio de la fotografía. No es posible verlos directamente.

Para cuerpos tan pequeños pueden presentarse, sin duda alguna, en el curso de los tiempos, las condiciones requeridas para causar una desviación.

El cuadro siguiente contiene los datos principales de los nueve satélites de Júpiter.

Satélites de Júpiter

Satélites (orden númerico de su descubrimiento)	Medio eje mayor de la órbita		Elementos de la órbita		Diámetro del satélite en kilómetros
	En radios del ecuador de Júpiter	En millones de kilómetros	Excentricidad	Inclinación hacia la eclíptica	
V	2,55	0,184	0,0050	2°20′	160
I	5,93	0,429	0,0	2.8	3950
II	9,44	0,683	0,0	1.39	3290
III	15,06	1,089	0,0013	2.0	5730
IV	26,49	1,915	0,0072	1.57	5380
VI	160	11,6	0,156	28.9	120 (?)
VII	167	12,1	0,025	31.0	50 (?)
VIII	330	23,8	0,33	149.0	?
IX	345	24,9	?	?	?

(Los puntos interrogantes significan la inseguridad o la falta de datos.)

Si establecemos como unidad de las distancias en el sistema de Júpiter la existente entre él y su satélite más cercano, que es el del número V, y si calculamos los valores que resultan de la serie expresada en la forma

$$d_{m1} = 1,1 + 1,2 \cdot 2^n,$$

en la que n acepta, como en la antes mencionada fórmula de Bode-Titius, los valores $-\infty$, 0, 1, 2, 3, 4, etc., conseguimos el siguiente cuadro comparativo :

Satélites	Distancia en relación a la unidad : Júpiter-V — Observada	Distancia en relación a la unidad : Júpiter-V — Calculada $(1,1 + 1,2 \cdot 2^n)$	$n =$
V	1,00	1,10	$-\infty$
I	2,32	2,30	0
II	3,70	3,50	1
III	5,90	5,90	2
IV	10,39	10,70	3
VI	62,7	77,9	6
VII	65,5		
VIII	129,2	154,7	7
IX	135,1		

La serie de los valores determinados por la fórmula

$$d_{m1} = 1,1 + 1,2 \cdot 2^n$$

sorprende efectivamente por la aproximada coincidencia con las distancias de los cinco satélites interiores, mientras que no existe una coincidencia para los satélites exteriores, los que presentan, como expusimos más arriba, caracteres de irregularidad en general.

Excusado es decir que también en este caso debió de calcularse la primera distancia con

$$1,1 + 1,2 \cdot 2^{-1},$$

en vez de

$$1,1 + 1,2 \cdot 2^{-\infty},$$

de modo que la primera distancia calculada sería 1,7 en vez de 1,0; demostrando así una distancia algo notable, como en el caso de la fórmula Bode-Titius. Estudiemos ahora las distancias de los satélites de Saturno. El cuadro siguiente presenta las distancias medias de los satélites a su cuerpo central, las inclinaciones, las excentricidades de las órbitas y los diámetros de los satélites.

Satélites de Saturno

Satélites	Distancia media al centro de Saturno		Elementos de la órbita		Diámetro del satélite en kilómetros
	En radios del ecuador de Saturno	En millones de kilómetros	Excentricidad	Inclinación hacia la eclíptica	
Mimas........	3,00	0,181	0,019	28°30′	470
Encelado......	3,80	0,233	0,005	28.4	590
Tetis	4,75	0,288	0,000	29	920
Dione.........	6,20	0,378	0,002	28.4	870
Rhea	8,50	0,515	0,001	28.23	1200
Titán.........	20,2	1,230	0,029	27.30	4000
Temis.........	23,5	1,427	0,230	39.6	?
Hiperión	23,8	1,445	0,104	27.20	300
Japet.........	57,0	3,476	0,028	18.28	780
Febe..........	200,0	12,650	0,166	175.8	60 (?)

Queremos dejar constancia de que la determinación del diámetro sólo ha sido posible con alguna exactitud para el mayor de los satélites, Titán; los diámetros de los demás son aproximados. La inexactitud es tanto mayor, cuanto menor sea el tamaño del cuerpo. Para los satélites Temis y Febe puede alegarse los mismos argumentos como para los satélites VI, VII, VIII y IX de Júpiter, poniendo en duda su carácter de satélite de evolución. Los dos satélites son de tamaño muy reducido y sus órbitas se distinguen por sus excentricidades considerables, como también por la inclinación hacia la eclíptica. La distancia media al cuerpo central es además para Temis muy poco menor que para Hiperión. Temis y Febe muy bien pueden ser satélites incorporados.

El cuadro siguiente da las distancias medias de los satélites, relacionadas a la unidad Saturno-Mimas, y además los valores que resultan de la serie expresada por

$$d_{m_1} = 0,95 + 0,3 \cdot 2^n,$$

aceptándose para n en el orden los valores $-\infty$, 0, 1, 2, 3, etc.

Satélites	Distancia en relación a la unidad Saturno-Mimas: Observada	Calculada $(0{,}95 + 0{,}3 \cdot 2^n)$	$n =$
Mimas	1,00	0,95	$-\infty$
Encelado.......	1,27	1,25	0
Tetis...........	1,58	1,55	1
Dione..........	2,06	2,15	2
Rhea...........	2,83	3,35	3
Titán	6,73	5,75	4
Temis	7,82	10,55	5
Hiperión	7,92		
Japet..........	19,0	20,15	6
Febe	67,0	77,75	8

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, debía ponerse para el primer valor calculado

$$0{,}95 + \frac{0{,}3}{2} = 1{,}1$$

en vez de 1,0.

La comparación de las distancias reales con los valores resultantes de la fórmula demuestra algunas diferencias, las cuales, sin embargo, no son tan importantes para quitar a las distancias el rasgo general del carácter de una progresión.

Para los cuatro satélites de Urano tenemos los datos principales en el siguiente cuadro :

Satélites de Urano

Satélites	Distancia media al centro de Urano		Elementos de la órbita		Diámetro del satélite en kilómetros
	En radios del ecuador de Urano	En millones de kilómetros	Excentricidad	Inclinación hacia la eclíptica	
Ariel..........	7,0	0,185	0,02	98°	< 800
Umbriel.......	9,9	0,250	0,01	98.20′	< 800
Titania	16,1	0,425	0,001	97.47	940
Oberón........	21,8	0,550	0,004	97.54	870

Los diámetros son aproximados.

Aceptándose la distancia Urano-Ariel como unidad, las diferentes distancias se presentan de acuerdo con el cuadro que sigue, en el que vemos también los valores correspondientes, que se obtienen de la fórmula:

$$d_{m_3} = 0,9 + 0,55 \cdot 2^n.$$

Satélites	Distancia en relación a la unidad Urano-Ariel		$n =$
	Observada	Calculada $(0,9 + 0,55 \cdot 2^n)$	
Ariel..........	1,00	0,9	$-\infty$
Umbriel........	1,42	1,45	0
Titania........	2,28	2,00	1
Oberón.........	3,09	3,10	2

Para Ariel debería calcularse lógicamente con $n = -1$, obteniendo así

$$0,9 + \frac{0,55}{2} = 1,17.$$

Los valores de la progresión reflejan con bastante exactitud las distancias de los satélites.

Vemos, pues, que en todos los casos de nuestro sistema planetario, las distancias de los planetas y de los satélites a sus cuerpos centrales revelan cierta regularidad, que puede interpretarse como acción de una ley desconocida, pues en rasgos generales observamos su exteriorización más o menos en la progresión

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \text{etc.}$$

La circunstancia que en la fórmula general

$$d_m = a + b \cdot 2^n$$

los coeficientes a y b son diferentes para cada sistema, no es, en el fondo, sino algo lógico, pues la posible ley implica muy probablemente la acción de las masas, que son diferentes en cada uno de los casos.

Merece una atención muy especial el ensayo del sabio alemán Víctor Goldschmidt, quien en los *Annalen der Naturphilosophie* publicó

un extenso trabajo sobre *Armonía en el Universo* y cúyas conclusiones más principales queremos resumir ligeramente, por cuanto ellas abarcan conceptos fundamentales de la cosmogenia.

Recapitulamos en primer lugar los datos principales de los ocho planetas, como los expone el cuadro siguiente :

Elementos principales de los planetas

Planetas	Diámetro en kilómetros	Distancia al Sol en unidades Sol-Tierra	Aplanamiento	Rotación en horas	Densidad del planeta
Mercurio......	4.816	0,39	?	?	5,65
Venus	11.969	0,72	?	23,9	5,41
Tierra	12.756	1,00	1:299	24,0	5,53
Marte	6.745	1,52	1:210	24,6	3,99
Asteroides.....	—	—	—	—	—
Júpiter........	143.757	5,2	1:14	9,9	1,31
Saturno	119.075	9,5	1:11	10,3	0,80
Urano.........	59.171	19,19	$\frac{1}{10} \div \frac{1}{15}$	10,8	1,30
Neptuno.......	54.979	30,07	?	?	1,17

Podemos distinguir esencialmente dos grupos :

1° Los planetas interiores con diámetros entre 4800 y 12.750 kilómetros, aplanamientos reducidos, tiempos de rotación de 24 horas, más o menos, y una densidad entre 4 y 5,6;

2° Los planetas exteriores con diámetros entre 55.000 y 143.760 kilómetros, aplanamientos grandes, tiempos de rotación 10 horas, más o menos, y una densidad entre 0,80 y 1,31.

El planeta principal es Júpiter. Su masa, que es aproximadamente un milésimo de la masa solar, supera notablemente a la suma de las masas de todos los demás planetas, de modo que debe admitirse cierta influencia de él en la evolución. Por tal razón conviene considerar las distancias, aceptando como unidad la existente entre el Sol y su planeta principal, Júpiter, y analizar luego cada uno de los 2 tramos de distancias : el interior, que corresponde al grupo de los pequeños planetas, y el exterior, que pertenece al grupo de los grandes.

El cuadro siguiente da las distancias en tal relación y en el rubro final los valores próximos racionales:

Planetas	Distancia media al Sol relacionada a la unidad		Valor próximo racional (Sol-Júpiter)
	Sol-Tierra	Sol-Júpiter	
Mercurio	0,39	0,075	$\frac{1}{13}$
Venus	0,72	0,139	$\frac{1}{7}$
Tierra	1,00	0,192	$\frac{1}{5}$
Marte	1,52	0,30	$\frac{1}{3}$
Júpiter	5,2	1,00	1
Saturno........	9,5	1,83	2
Urano	19,19	3,70	4
Neptuno........	30,07	5,90	6

Analicemos primero el tramo interior con el Sol y Júpiter como puntos extremos. Las distancias se presentan en el orden :

Sol	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter
0	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

Cada uno de los cuerpos divide el tramo en dos segmentos.

Para Mercurio, por ejemplo, tenemos los dos segmentos $\frac{1}{13}$ y $\frac{12}{13}$, que están en la relación de 1 : 12.

Para Venus tenemos la relación de los dos segmentos en 1 : 6.

Las proporciones de los segmentos para cada cuerpo se presentan en la siguiente serie, cuyo carácter resulta más evidente multiplicándola por 4 ó por 6 :

	Sol 0	Mercurio $\frac{1}{12}$	Venus $\frac{1}{6}$	Tierra $\frac{1}{4}$	Marte $\frac{1}{2}$	Júpiter ∞
Por 4......	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	2	∞
Por 6......	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	3	∞

Para el tramo exterior tenemos naturalmente el Sol como punto extremo interior. Además, tenemos la distancia Sol-Júpiter como unidad mientras que el extremo exterior se pierde en el espacio, puesto que no existe ninguna razón para considerar a Neptuno como punto final.

Luego tenemos una serie, cuyo carácter resalta más a la vista, multiplicándola por $\frac{1}{2}$:

Sol 0	Júpiter 1	Saturno 2	Urano 4	Neptuno 6	Espacio ∞
0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞

En cuanto a los satélites de Júpiter, hemos podido notar que las distancias de los satélites principales I, II, III y IV concordaban muy bien con las que dió la fórmula correspondiente.

Los otros cinco tienen tamaños tan reducidos, en comparación a los mencionados I a IV, que surgen espontáneamente sospechas referente a su carácter de evolución en el sistema, alimentadas además por la marcada irregularidad que demuestran muy especialmente los satélites VI a IX con respecto a la regla de las distancias.

Al fijarnos en las distancias de los cuatro satélites principales en el cuadro correspondiente, que se presentan, expresadas en millones de kilómetros, como siguen:

	I	II	III	IV
Distancia...	0,429	0,683	1,089	1,915

vemos inmediatamente que ellas marcan aproximadamente la serie:

Júpiter	I	II	III	IV
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2

Para los satélites de Urano podemos también deducir fácilmente la serie, pues multiplicando simplemente las distancias, expresadas en millones de kilómetros en el cuadro correspondiente, por el coeficiente 2,6 obtenemos:

	Urano	Ariel	Umbriel	Titania	Oberón
Distancia	0	0,185	0,250	0,425	0,550
Por 2,6......	0	0,48	0,65	1,1	1,43

vemos representados en estos valores con suficiente aproximación la serie

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}.$$

Hemos, pues, obtenido, sin transformación, para los satélites de Júpiter y Urano series cuyo carácter general coincide con las series establecidas para los planetas y vemos que, tanto para los satélites de Júpiter como para los de Urano, la unidad en las series está marcada por la posición del satélite de mayor diámetro y masa.

En el caso de Saturno tenemos un satélite que domina por su masa y relacionamos, por lo tanto, lógicamente las distancias con la existente entre éste (Titán) a su cuerpo central.

El cuadro siguiente da las distancias de los satélites saturnianos, relacionadas a la unidad Saturno-Mimas, como las hemos expuesto ya en un cuadro anterior, y además las distancias relacionadas a la unidad Saturno-Titán, como también los correspondientes y próximos valores racionales de éstas:

Satélites	Distancia relacionada a la unidad		Valor próximo racional Saturno-Titán
	Saturno-Mimas	Saturno-Titán	
Mimas	1,00	0,148	$\frac{1}{7}$
Encelado..........	1,27	0.188	$\frac{2}{11}$
Tetis	1,58	0,234	$\frac{1}{4}$
Dione	2,06	0,306	$\frac{1}{3}$
Rhea	2,83	0,42	$\frac{2}{5}$
Titán.............	6,73	1,00	1
Temis	7,82	1,16	$\frac{6}{5}$
Hiperión..........	7,92	1,18	
Japet.............	19.0	2,83	3
Febe..............	67,0	10,0	10

En el tramo interior, determinado por los extremos Saturno y Titán, cada uno de los satélites divide el tramo en dos segmentos, cuyas proporciones nos dan la siguiente serie :

Saturno	Mimas	Encelado	Tetis	Dione	Rhea	Titán
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	∞

Esta serie revela más su carácter multiplicándola por 3. Tenemos, luego :

Saturno	Mimas	Encelado	Tetis	Dione	Rhea	Titán
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	∞

Para Temis, Hiperión y Febe, satélites del tramo exterior, habíamos ya constatado que ellos no cuadraban en el marco de la progresión geométrica, que establecimos. Temis e Hiperión no corresponden tampoco al carácter de la serie de Goldschmidt, la que tendríamos, para Titán afuera, en

$$1, \frac{3}{2}, 2, 3, \text{etc.}$$

Los tres satélites mencionados son de tamaños muy reducidos y las excentricidades muy considerables de sus órbitas admiten la suposición de que hayan obrado sobre ellos perturbaciones. El último satélite es además por todas sus características muy dudoso; se trata posiblemente de un cuerpo capturado.

Eliminando estos tres satélites dudosos, las series obtenidas se presentan de acuerdo con el siguiente :

Cuadro de las series establecidas por Goldschmidt

	Serie normal	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞
Planetas exteriores	Sol, Júpiter, Saturno, Urano Neptuno, Espacio	0	•	$\frac{1}{2}$	•	1	•	2	3	∞
Planetas interiores	Sol, Mercurio, Venus, Tierra Marte, Júpiter	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	∞
Satélites de Júpiter	Júpiter, I, II, III, IV, Espacio	0	•	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	•	2	•	∞
Satélites interiores de Saturno	Saturno, Minas, Encelado, Tetis Dione, Rhea, Titán	0	•	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	•	∞
Satélites exteriores de Saturno	Saturno, Titán, Japet, Espacio	0	•	•	•	1	•	•	3	∞
Satélites de Urano	Urano, Ariel, Umbriel, Titania Oberón, Espacio	0	•	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	•	•	∞

Es ahora sumamente interesante la observación que la serie normal es propia a diferentes fenómenos de la física en general, así a la acústica, a la óptica y a las formas de cristales.

La proporción de los números de las ondas sonoras para dos tonos de la octava (Do-do) es como 1 : 2.

La escala de los números de ondas para todos los tonos y semitonos entre la octava, relacionados a 1 (Do), resulta luego de acuerdo con el siguiente cuadro :

Do	1,000	Sol	1,498
	1,059		1,587
Re	1,122	La	1,682
	1,189		1,782
Mi	1,260	Si	1,888
Fa	1,335	do	2,000
	1,414		

Un tono cuyo número de ondas sonoras con relación a la unidad (do) sea x, divide el intervalo de la octava en dos partes, que están en la proporción

$$\frac{x-1}{2-x}.$$

Así obtenemos para cada tono y semitono las siguientes proporciones de los intervalos :

Do	1,000	0	
	1,059	$^1/_{16}$	
Re	1,122	$^1/_8$	
	1,189	$^2/_{11}$	
Mi	1,260	$^1/_3$	
Fa	1,335	$^1/_2$	
	1,414	$^2/_3$	
Sol	1,498	1	A
	1,587	$^3/_2$	
La	1,682	2	
	1,782	3	
Si	1,888	8	
do	2,000	∞	

Considerándose la parte A en unión con Do-do ($0 - \infty$), tenemos exactamente la serie normal :

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3,\ \infty,$$

cuyos tonos son fundamentales en la armonía musical.

La serie normal aparece con mucha aproximación en las líneas espectrales ABCDEFH de Fraunhofer, y por consiguiente en los colores purpúreo, escarlata, rojo, amarillo, verde, azul y violeta y además, según las indicaciones de Goldschmidt, en las formas de cristales, de modo que debe suponerse en la serie el resultado de la acción de un principio fundamental en el Universo.

Podría objetarse que el desarrollo de las series es sólo aproximado por cuanto las distancias de los planetas y satélites no demuestran por lo general una coincidencia absoluta con la serie. Debe tomarse en consideración, sin embargo, que, en efecto, ni siquiera podría esperarse tal coincidencia, en vista de que la acción de perturbaciones se refleja en muchas anormalidades, que no cuadran en la idea general, que nos hemos formado poco a poco con respecto al desarrollo cosmogénico.

Como indicios de perturbaciones en la evolución, podemos interpretar las inclinaciones de las órbitas que ofrecen los satélites de Urano y de Neptuno hacia el plano general del sistema o sea el plano ecuatorial solar. Ellas forman con él los ángulos respectivos de 98 y 142° y los ejes de sus planetas presentan probablemente las mismas inclinaciones, de modo que los dos sistemas nos hacen surgir espontáneamente la idea de una acción perturbadora, que tal vez haya obrado en los tiempos más remotos de la evolución. También los dos

satélites de Marte, cuyos diámetros deben ser de 10 a 50 kilómetros aproximadamente, son satélites posiblemente capturados por todas las anormalidades que ofrecen, tanto más, cuando en la vecindad de Marte empieza la zona del enjambre de los asteroides.

Admitiéndose la posibilidad de incorporaciones, debe admitirse desde luego la existencia de perturbaciones.

Llama la atención que a los dos grupos de planetas, de carácter muy diferente, corresponden también dos tramos del carácter de la serie normal, de modo que podría interpretarse esta coincidencia como indicio de que se hubieran destacado, en la evolución de nuestro sistema planetario, dos períodos principales: el de la separación de los planetas exteriores y el de la formación de los interiores.

LA FORMACIÓN ENTRERRIANA

Por MOISÉS KANTOR

I

SEGÚN D'ORBIGNY (1827)

Las capas de Entre Ríos, desde unas cinco leguas al norte de Cavalla Cuatiá (La Paz) hasta el río de las Conchitas, no presentan una inclinación regular, siguen una línea horizontal aumentando su espesor desde su nacimiento al norte hasta el arroyo Verde; desde este punto se hunden hasta el sur sobre una pendiente más fuerte que el curso del Paraná, hasta que algunas de ellas desaparecen debajo de la línea de las aguas.

En el río de las Conchitas estas capas se interrumpen por los terrenos bajos y cubiertos de aluviones modernos que rellenan el lecho del río. D'Orbigny distingue las siguientes capas entre La Paz (Cavalla Cuatiá) y Paraná (Bajada):

1. *Grès tertiaire marin* en el borde mismo de Paraná, cerca del arroyo Verde, una capa delgada de uno a dos metros, en parte tapada por las aguas. Este *grès* desaparece al norte y al sur bajo otras capas. Contiene, en estado de impresiones, fragmentos de conchillas marinas de los géneros *Ostrea* y *Venus,* difícilmente determinables por su mal estado de conservación. La capa contiene muchos fragmentos de madera fósil.

D'Orbigny indica esta capa en su perfil (t. VIII, *Atlas,* pl. 5) con la letra D (véase nuestra reproducción de este perfil).

2. Inmediatamente encima del *grès marin* reposa una capa de *grès*

quartzeux, de un metro de espesor, que parece ser una dependencia del *grès à ossements* (capa E) que ocupa, sobre 20 metros de altura, todo el largo de la barranca. Este *grès quartzeux,* fuertemente teñido de hierro, de un color pardo rojizo, se compone de granos finos y contiene algunos troncos de árboles silificados, a veces de algunos metros de largo.

D'Orbigny encontró en esta capa *l'humérus silicieux du Toxodon paranensis.* Esta capa se inclina hacia el sur en una medida más fuerte que la corriente del Paraná.

3. Encima del *grès à ossements* se encuentra una roca calcárea (capa F del perfil) *calcaire cloisonné gris,* que contiene arcilla y yeso. Esta capa, que llega a un espesor de unos 10 metros, contiene tanto más calcáreo cuanto más compacta se presenta en su parte inferior, mientras que encima pasa insensiblemente al estado arcilloso. No encierra ningún rastro de cuerpos orgánicos. Se presenta desde pocas leguas al norte de Cavalla Cuatiá (La Paz) hasta el río de las Conchitas.

4. *Argile gris* (capa G del perfil). No existe una línea de demarcación entre esta capa y la anterior: presenta un espesor de una docena de metros. En su parte superior se extiende un banco de un medio metro de cristales de yeso.

Esta capa, que se presenta en todo el largo de la barranca, se inclina hacia el sur junto con las anteriores.

Comparando el conjunto de estas capas con las de Bella Vista en Corrientes, las considera de una posición superior a las últimas, perteneciendo, no obstante, al mismo sistema terciario (véase págs. 112 y 113, *Atlas,* pl. 8).

Las pruebas de d'Orbigny al respecto no son convincentes.

Las capas de las barrancas en la Bajada (Paraná) están compuestas en la forma siguiente:

1ª Una capa de *grès quartzeux* de 16 metros de espesor, formada de granos de cuarzo blanco, conteniendo una gran cantidad de fósiles marinos muy bien conservados y muchos huesos de peces y fragmentos de madera. Los moluscos que d'Orbigny reconoció en esta capa son *Pecten paranensis* d'Orbigny, *Pecten Darwinianus* d'Orbigny, *Ostrea patagonica* d'Orbigny, *Ostrea Alvarezii* d'Orbigny.

Esta capa se adelgaza fuertemente al sur. D'Orbigny llama a esta capa *grès ostréen* (capa H del perfil);

2ª Encima del *grès ostréen* se encuentra una capa de *calcaire arénifère* (I del perfil), que contiene conchillas marinas, mayormente en forma de moldes. Son *Ostrea Alvarezii* d'Orbigny, *Venus Munsterii* d'Or-

bigny, *Arca Bonplandiana* d'Orbigny, *Cardium platense* d'Orbigny;

3ª Sobre el calcareo arenífero se observa una capa de 3 a 4 metros de espesor de *grès quartzeux* friable, casi blanco, mezclado con fragmentos calcáreos. No contiene rastros de vegetales ni cuerpos organizados (capa F del perfil);

4ª La última capa, la más superior del sistema compuesta de una arcilla calcárea rojiza, es la arcilla pampeana. D'Orbigny considera las capas de Bajada (Paraná) superiores a las de Cavallú-Cuatiá (La Paz), que constituyen el piso superior de los terrenos terciarios marinos. Esta suposición no quedó confirmada, lo mismo que su admisión de que las capas fosilíferas de Paraná sean fuertemente inclinadas hacia el sur, desapareciendo en Punta Gorda (Diamante). En la última localidad fueron encontradas las capas marinas correspondientes a Paraná.

En la base de sus observaciones, d'Orbigny divide todo el sistema terciario de las provincias de Corrientes y de Entre Ríos en tres distintas épocas: 1ª inferior, él la llama *terciario guaranítico*, sin ningún rastro de fósiles marinos; 2ª media, *terciario patagónico*, se compone de una alteración de capas marinas y de capas que contienen huesos de mamíferos y madera fósil; 3ª superior, *arcilla pampeana*, que contiene únicamente huesos de mamíferos.

Esta división, establecida por d'Orbigny, subsiste hasta hoy día, pero provoca actualmente las siguientes dudas: 1ª si el guaranítico es una formación diferente del patagónico; 2ª si las capas del Paraná son superiores a las capas entre La Paz y el río de las Conchitas; 3ª si la arcilla pampeana puede considerarse perteneciente a la formación terciaria. D'Orbigny compara las provincias de Corrientes y de Entre Ríos con el Chaco, y constata que forman un promontorio más elevado, pertenecen a una época geológica más antigua y están separados del Chaco, cubierto por la arcilla pampeana, por una inmensa falla que ocupa todo el largo del Paraná desde el 27° hasta 32° de latitud sur. D'Orbigny atribuye a las rocas ígneas de Misiones el levantamiento de las provincias de Corrientes y de Entre Ríos, su elevación por encima de las arcillas pampeanas del Chaco y la formación de la gran falla del Paraná. Los estudios posteriores a d'Orbigny se limitan a la región inmediata a la del Paraná, y sólo Roth, y últimamente Bonarelli y Nágera, han practicado investigaciones en la región al norte del Paraná.

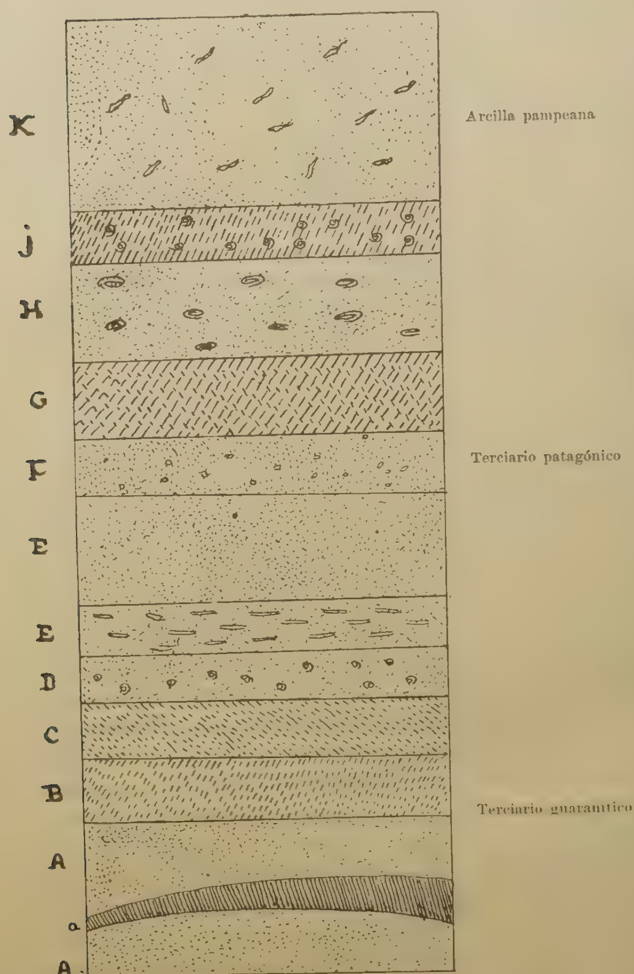


Fig. 1. — Pertil geológico, segun d'Orbigny : A, gres ferrugineux ; *a*, argile tres fine ; A', grès ferrugineux ; B, calcaire à fer hidraté ; C, argile gypseux ; D, grès marin avec Venus ; E, grès à ossements ; E, grès fin sans ossements ; F, calcaire cloissonné avec gypse et argile ; G, argile gris avec amas de gypse ; H, J, calcaire et grès avec *Ostrea Alvarezii* et *Venus Munsterii* ; K, argile pampeenne.

II

SEGÚN DARWIN (1832-1846)

Transcribimos sus excelentes observaciones en la región de Paraná (Bajada). Las barrancas de una altura de 60 a 70 pies aproximadamente presentan en la Bajada un corte interesante: la parte inferior se compone de estratos terciarios con moluscos marinos, y la parte superior de la formación pampeana. La capa más inferior es un limo endurecido negruzco con restos claros de plantas fósiles. Encima se encuentra una gruesa capa de arcilla arenosa amarillenta con mucho yeso cristalizado y muchas conchas de especies de *Ostrea*, *Pecten* y *Arca*. Le sigue, generalmente, una roca calcárea arenosa cristalina; pero a veces queda intercalada entre la arcilla arenosa y la roca calcárea una capa de unos 12 pies de espesor de arcilla verde obscura, que se descompone en pequeños fragmentos angulosos.

El calcáreo encierra pequeños rodados de cuarzo, conchilla triturada, dientes de peces y a veces grandes huesos. Contiene muchas veces tanta arena que pasa a una arenisca calcarea, y en estas partes se encuentra principalmente la grande *Ostrea* patagónica.

Darwin enumera los moluscos fósiles que se encuentran en estas capas y fueron descritos y determinados por d'Orbigny.

La mitad superior de las barrancas, de espesor de unos 30 pies, se compone de limo pampeano cuya parte inferior es de color pálido, la parte superior de color rojo claro, con algunas capas irregulares de una variedad arenosa de tosca y algunas concreciones comunes.

Directamente encima de las rocas calcáreas marinas se encuentra una capa delgada con una forma concrecionaria de una tosca dura y blanca, que puede considerarse como capa superior de los depósitos inferiores, o como capa inferior de la formación pampeana; no presenta un tránsito entre ambas formaciones.

Construímos un perfil a base de estos datos.

Admirablemente está observada la relación entre la formación terciaria y el limo pampeano. Darwin emplea bien el término « tosca », mientras que para d'Orbigny la arcilla pampeana equivale a tosca.

En efecto, encima de las rocas calcáreas marinas se encuentra una tosca clara y blanca.

Esa tosca (arenosa en buena parte) la consideramos, por razones

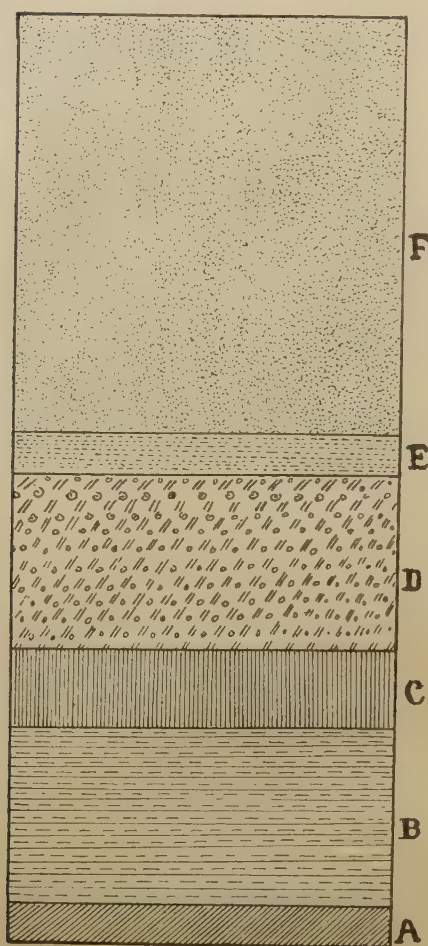


Fig. 2. — Perfil de los terrenos de Paraná, de acuerdo con los datos de Darwin : A, limo negruzco; B, arcilla arenosa con Ostrea, Pecten y Arca; C, arcilla verde obscura; D, roca calcárea arenosa con Ostrea patagónica, Pecten, etc.; E, tosca; F, limo pampeano.

que expondremos más adelante, como la capa inferior de la formacion pampeana.

El perfil de Darwin permite separar netamente la formación entrerriana de la formación pampeana.

III

SEGÚN BRAVARD (1858)

Bravard, en un extenso estudio, se refiere únicamente a las inmediaciones de Paraná: al espacio comprendido entre la Bajada Grande y el puerto de la Santiagueña en una extensión de 3 ó 4 millas.

La línea de separación entre el terreno marino y los depósitos pampeanos está perfectamente determinada: el color rojizo, propio de la arena arcillosa cuaternaria, como también la textura compacta y sin apariencia ninguna de estratificación, hacen un contraste tan notable con las zonas alternantes y diversamente coloreadas del terreno marino, que se reconoce fácilmente que son el resultado de causas diferentes (1). Ya el simple aspecto y la disposición horizontal de las capas de esta formación indican que se trata de terrenos terciarios; sus caracteres geognósticos son perfectamente parecidos a los que distinguen los calcáreos toscos de París.

Bravard estudia detalladamente dos secciones geológicas en Paraná, una formada en la quebrada del puerto de la Santiagueña, otra tomada en la quebrada de Garrigó a 400 metros de distancia al este de la precedente, cerca del actual «Puerto Nuevo». De acuerdo con esta investigación, resulta que el terreno marino queda dividido en dos estados o formaciones perfectamente distintas: *la formación superior,* que encierra todas las capas sólidas (calcáreos o silicosas de la serie) y *la formación inferior*, que contiene las substancias arcillosas o arenosas que no presentan mucha consistencia. Siguiendo las faldas de la colina hacia el oeste (hasta el pequeño riachuelo del Salto) el depósito marino presenta en su extensión el mismo aspecto geológico.

El número de los estratos varía de una manera tan notable que de veinte en veinte metros, a veces a más cortas distancias, se presen-

(1) Para nosotros, el límite verdadero entre los depósitos pampeanos y el terreno marino está indicado por la arcilla gris con su tosca correspondiente.

tan grandes diferencias. Se observa también en el sentido de la extensión de estas capas un fenómeno mucho más sorprendente: esto es, el pasaje ordinariamente insensible, pero a veces rápido, de la roca calcárea a la arena pura.

En resumen, el depósito marino de las cercanías de Parana pertenece, según Bravard, a dos formaciones muy distintas:

1ª Estado o sistema calcareo: las capas de calcáreo y de arenisca, contienen impresiones de numerosas especies de conchas marinas bivalvas y de algunas univalvas, osamentas rotas de mamíferos terrestres y marinos, dientes de escualos; restos de crustáceos;

2ª Estado o sistema de las arenas arcillosas: las capas de arena y arcilla contienen conchas bien conservadas de las mismas especies que las impresiones de las capas precedentes. Algunos restos de mamíferos terrestres y marinos, abundante cantidad de osamentas hechas pedazos de varias especies de pescados, dientes de escualos y, muy raras veces, restos de cocodrilos y de tortugas.

Bravard atribuye una gran importancia a los caracteres mineralógicos de las capas del depósitos marino del Paraná, suponiendo, con razón, que pueden completar los datos paleontológicos para la determinación de la edad de los terrenos en cuestión.

Bravard da una lista de los organismos fósiles de los terrenos marinos del Paraná, dividiéndolos en: 1° animales marinos; y 2° animales terrestres o fluviales. Con respecto a los últimos constata que son todos muy deteriorados y pulidos en su superficie, probando, por esta calidad, que han sido transportados por aguas corrientes, arrancados de terrenos adyacentes, coetáneos, o más antiguos, y depositados por estas afluencias en el fondo del golfo marino, en el cual se han formado las capas marinas.

El mar no tenía en este paraje sino una profundidad media, lo que parece indicado por las formas litorales de las conchas fósiles. En cuanto a la edad geológica, Bravard considera que los terrenos de Paraná se encuentran en difíciles condiciones de determinacion: no existen encima o debajo de ellas capas más recientes o más antiguas que por sus caracteres mineralógicos, o por los fósiles que encierran, puedan ofrecer términos de comparación inmediata; la singular reunión en todas sus capas de numerosas especies de conchas marinas perfectamente conservadas y testáceos de especies diferentes, de los cuales se encuentran solamente los moldes y traídos de terreno de otra naturaleza, añade una nueva dificultad a la determinación de la edad geológica; pero es sobre todo la mezcla de los fósiles

precedentes con las osamentas de mamíferos terrestres y marinos y con los restos de reptiles y de pescados fluviales que forman la parte más difícil del problema.

Bravard llega a la conclusión (pág. 87) de que los cuerpos organizados de los terrenos de Paraná pertenecen a dos orígenes perfectamente separados uno del otro, y que indican dos faunas que no se pueden definir de una manera positiva, y atribuye a los restos de los animales terrestres y fluviales, todos muy deteriorados y pulidos en la superficie, una *edad eocea*. Los terrenos de donde se han despegado los numerosos restos de estas especies no pueden estar muy lejos; puede muy bien ser que se encuentren situados inmediatamente al lado de la formación que constituye las barrancas del río y de consiguiente más arriba del nivel ordinario de las aguas. Estos organismos fueron ya descompuestos cuando han sido transportados a las capas donde ahora se encuentran.

En cuanto a los depósitos marinos del Paraná pertenecen, según Bravard, al mioceno.

Bravard agrega a su importante trabajo una lista de los organismos fósiles de los terrenos marinos del Paraná (pag. 62) que consta de 75 especies, de las cuales solamente 8 eran conocidas anteriormente.

IV

SEGÚN BURMEISTER (1859)

Burmeister divide la formación terciaria en superior (patagónica de d'Orbigny) e inferior (guaranítica de d'Orbigny). La formación terciaria superior presenta en la base un depósito marino formado de diferentes capas de arcilla, arena, marga y calcáreo, entre las cuales la arena domina tanto como en la formación pampeana la arcilla. Las capas de arcilla pura y de poco espesor son raras. Las arenas, en cambio, no se presentan casi nunca puras, sino casi siempre mezcladas con algunas partes de arcilla que les dan el color amarillo grisáceo. Las capas donde domina la arena contienen conchillas marinas, algunos restos de crustáceos y una cantidad considerable de huesos de pescados, entre los cuales predomina, sobre todo, dientes de tiburones. Se encuentran también muchos restos de peces de agua dulce y algunos de mamíferos, marinos o terrestres; los últimos, sin em-

bargo, raramente. El calcáreo, parte esencial en la mitad superior de la formación, se presenta bajo la forma de capas bastante compactas y de un espesor de 1 a 2 metros encima de las capas de las arenas inferiores. Estas capas, que son evidentemente producidas por las conchillas trituradas y acumuladas en gran cantidad, presentando así una formación marina, no contienen en sus materiales precipitaciones de sales (como la marga diluvial) (1). Burmeister, basándose en sus propias observaciones y en las de d'Orbigny, Darwin y Bravard, llega al siguiente resultado:

La disposición de las barrancas de la costa del río prueba, evidentemente, que sus depósitos se han acumulado en un antiguo gran golfo marino que avanza más aún en la América meridional que en la región donde existe actualmente la ciudad de Paraná.

El golfo sufría varios cambios: al principio de la época era más largo y más profundo, su fondo se elevaba a medida que se formaban nuevos depósitos de capas uniformes. Durante este lento progreso la mayor parte de la formación se depositó en estado de mezcla íntima de arena y de arcilla.

V

SEGÚN STELZNER (1872)

Stelzner, aunque estuvo en Entre Ríos, dice en su trabajo clásico (2) que no ha podido agregar nuevos datos a los de d'Orbigny, Darwin, Burmeister y Bravard. Este juicio autorizado de un investigador tan excelente como Stelzner debería tomarse bien en cuenta cuando se trata de corregir o modificar las observaciones de los primeros exploradores de la formación entrerriana. Stelzner opina que la distribución de esta formación se reduce a un brazo de mar que se encontraba unido al mar terciario abierto en el este y se extendía hasta la región del Paraná. Se basa Stelzner, para tal interpretación, en el hecho de que en los bordes de las sierras pampeanas de Buenos Aires y de Córdoba, lo mismo que en el interior del país, esta formación no fué encontrada. La boca del río de la Plata podría considerarse, según Stelzner, como último resto de este golfo terciario.

(1) Nosotros hemos observado precipitaciones de sal en las capas marinas inferiores en Diamante.

(2) *Beiträge zur Geologie der Argentinischen Republik*, Berlín, 1892.

VI

SEGÚN DOERING (1882)

Doering denomina los estratos de Paraná, *formación patagónica*, dividiéndola en tres subpisos: piso paranense, piso mesopotámico y piso patagónico. El piso paranense lo considera marino. En los bancos inferiores de la formación patagónica apenas hay ocasión de observar esta subformación, porque su parte superior, una especie de marga de grano fino de color verdusco, se halla en el mismo nivel del agua, siendo bañado por las olas del río. Encima de los estratos marinos de la subformación anterior se hallan asentados los gruesos bancos de una especie de arenisca que carece completamente de fósiles marinos, abundando en ella, en cambio, los restos de distintos vegetales, de moluscos y pescados de agua dulce y de animales terrestres: es el piso mesopotámico. El piso patagónico es marino y tiene un espesor de 15 ó 25 metros.

Lo nuevo en el concepto de Doering es la suposición de la existencia de una formación continental, intercalada entre dos formaciones marinas.

VII

SEGÚN SANTIAGO ROTH (1882-1922)

Roth distingue en las barrancas del río Paraná, entre Victoria y La Paz, dos fases: una marina y otra fluvial. En la región de La Paz hasta cerca de Santa Elena, los depósitos entrerrianos están representados por la facie fluvial.

Durante las grandes bajantes del río aflora en la base de la barranca, en el puerto de La Paz, una peña de cuarcita de color gris y rojo de la formación de las areniscas rojas (formación guaranítica de d'Orbigny) y algo más al norte capas de loess pampeano (1). Las mismas capas de loess existen al pie de la barranca entre Santa Elena y el río Feliciano y en Diamante (2). El yaciente de los estratos entrerria-

(1) No lo hemos podido comprobar.

(2) Nos parece muy dudoso.

nos está así formado en parte de la arenisca roja y en parte de loess pampeano. En las barrancas de la Paz los depósitos fluviales entrerrianos están formados de arena suelta con bancos de cuarcita y estrato de arcilla. Sobre los depósitos fluviales se encuentran capas de *marga arenosa* (1) de color gris claro parecidos a los que Ameghino llamó lacustre y encima de éstas sigue el loess pampeano, algo arenoso. La capa superior está formada por tierra humus. Hasta unas diez leguas en dirección a Paraná la constitución geológica no cambia mucho, no se observa, sin embargo, en la base de la barranca ni cuarcita ni loess.

Antes de llegar a Santa Elena se encuentran las primeras capas con fósiles marinos que aumentan gradualmente en espesor hasta la ciudad de Paraná, donde la formación entrerriana se compone únicamente de la facie marina. Llama la atención que los restos de mamíferos terrestres son muy abundantes en las capas marinas más que en las de origen fluvial y que están limitados a ciertos niveles en la parte inferior. Roth llega a la conclusión que la transgresión *entrerriense* tuvo lugar en el tiempo en que se depositó el loess del horizonte eopampeano.

Los estratos de Paraná, lo mismo que en Monte Hermoso, pertenecen por su posición geográfica y estratigráfica, como por su fauna de mamíferos, a la formación pampeana. No son de una edad inferior al mioceno.

Lo nuevo, en el concepto de Roth, es la suposición de que por debajo de la formación marina *continuará el loess pampeano.* La formación entrerriana se considera, en esta forma, intercalada en la formación pampeana, debiendo confirmar, así, la gran edad geológica de su parte inferior (mioceno).

Bonarelli y Nágera, sin embargo, niegan la existencia del loess por debajo de la formación marina; en cuanto a nosotros tampoco hemos podido observar el loess en las condiciones indicadas por Roth, y además hemos puesto en duda la existencia de loess, aún en la parte superior de las barrancas, considerándolo como limo arenoso (véase *Monte Hermoso).*

(1) Esta « marga arenosa » es *l'argile grise* de d'Orbigny.

VIII

SEGÚN BONARELLI Y NÁGERA (1913)

No tenemos más que un breve resumen de los autores, no habiendo sido publicado su trabajo definitivo. Según estos autores, el terciario guaranítico de d'Orbigny no se halla debajo de la parte inferior del terciario patagónico; tampoco el terciario patagónico inferior de d'Orbigny se halla por debajo del terciario patagónico superior de d'Orbigny. Llamando la formación de Entre Ríos y Corrientes « Mesopotámica » la dividen en 3 pisos : inferior (horizonte arenoso), medio (horizonte calcáreo) y superior (horizonte arcilloso). A un mismo horizonte pertenecen, pues, las areniscas ferruginosas de Corrientes y las arenas con fósiles marinos y terrestres de Entre Ríos (mesopot. inferior); los calcáreos *a fer hidraté,* los calcáreos arcillosos de Corrientes y los calcáreos con fósiles marinos de Entre Ríos (mesopot. medio); las arcillas yesosas y las arcillas grises de Entre Ríos (mesopot. superior). La formación mesopotámica se presenta, así, en dos facies : facie correntina (terciario guaranítico) y facie entrerriana (terciario patagónico de d'Orbigny).

IX

SEGÚN JOAQUÍN FRENGUELLI (1921)

Frenguelli nos da una serie estratigráfica de los terrenos de Entre Ríos que consta de 20 diferentes pisos. En un perfil « absolutamente esquemático » (fig. 2) de las barrancas del río Paraná, donde se indica la distribución de estos pisos, Frenguelli divide los terrenos de Entre Ríos en tres formaciones marinas : paranense, entrerriense y ríonegrense, con las intercalaciones continentales de dos facies especialmente fluvial : mesopotamiense y ríonegrense. El orden cronológico completo, según las esquemas de Frenguelli sería : paranense, mesopotamiense (paleopatag. mioceno inferior), entrerriense, ríonegrense terrestre (neopatag. plioceno), ríonegrense marino, araucanense, hermosense (araucano plioceno) y una serie de formaciones pampeanas, que no entraremos a enumerar. La realidad de la naturaleza está perfectamente ajustada al esquema y recibe las enumeraciones que al esquema corresponden.

X

OBSERVACIONES DEL AUTOR HECHAS DURANTE EL MES DE ENERO DE 1922 E IGUAL MES DEL AÑO 1923 (1)

Las barrancas son bajas, en parte a pique. Al norte están formadas principalmente de arena amarilla, suelta o algo consistente. En la base de la barranca se ven concreciones de arenisca de una forma irre-



Fig. 3. — Barrancas de La Paz

gular. Es seguro que no se trata de un banco, como lo indica Roth en su perfil; tampoco su forma irregular permite suponer un transporte por el río. El origen de estas areniscas se me aclaró más tarde cuando vi repetidas veces, en otros sitios del Paraná, formaciones análogas. Esta arenisca se encuentra *in situ* en la parte superior de la arena fluvial. Se forma debido a procesos diagenéticos. El cemento en carbonato cálcico en mayor o menor cantidad, la roca no es compacta, pasando muy frecuentemente en arena suelta. Debido a la erosión la arenisca más resistente puede conservarse en forma de peñas, como se puede observar en el camino de Paraná a El Brete. Por el mismo efecto de la erosión, fragmentos de areniscas pueden ser

(1) Se refieren especialmente a las barrancas entre La Paz y Diamante.

llevados a las partes inferiores de la barranca o a la orilla del río.

Existe en El Brete una cantera que explota estas areniscas. (Es de propiedad del doctor Medus.)

Roth dice haber observado en la base de la barranca una cuarcita roja. En la costa he visto apilada arenisca de cuarcita, que se explota por los habitantes de La Paz.

No puedo afirmar, sin embargo, que la cuarcita se encuentre *in situ* en la base de la barranca. En las barrancas al norte de La Paz la arena está sobrepuesta por el limo gris con tosca en forma de Lösskindel: la capa superior está formada por tierras humus en la que la tosca se



Fig. 4. — Barrancas entre La Paz y Santa Elena

presenta en forma de pequeños rodados. El espesor de las capas indicadas varía mucho aún a poca distancia; pero las barrancas, por lo general, son aquí bajas. Al sur del puerto el humus pasa paulatinamente al limo pampeano y éste a la arcilla gris; en cambio queda bien marcado el límite entre la última roca y la arena amarilla que forma la base de la barranca. La arcilla gris y el limo están atravesados por tosca, sobre todo la primera de estas rocas.

Las barrancas entre La Paz y Santa Elena son bajas (1) y cortas, entrecortadas por valles transversales. Arcilla gris y limo amarillo pasan insensiblemente uno al otro. A más de cuarenta cuadras del

(1) En los perfiles publicados por el doctor Roth la altura de las barrancas es mucho más grande de la que tienen en realidad.

pueblo, aparece, en la base de la barranca, arcilla estratificada de un metro más o menos de espesor. La arena falta en esta parte. A una legua y media de La Paz se encuentra una fábrica abandonada de yeso. La arena aparece de nuevo cerca del arroyo Seco (fig. 4). Las barrancas varían en altura no pasando de 20 metros. Las paredes de las barrancas pocas veces van a pique, forman un ángulo variable de inclinación y son atravesadas por surcos, efectos de la erosión fluvial.

Un corte interesante representa la barranca en el llamado Punto Colorado (fig. 5), una legua antes de llegar a Santa Elena. Se distinguen cinco capas distintas: arcilla parda estratificada, arcilla amarilla, arena con estratificación en parte cruzada, limo muy arenoso y tosca.

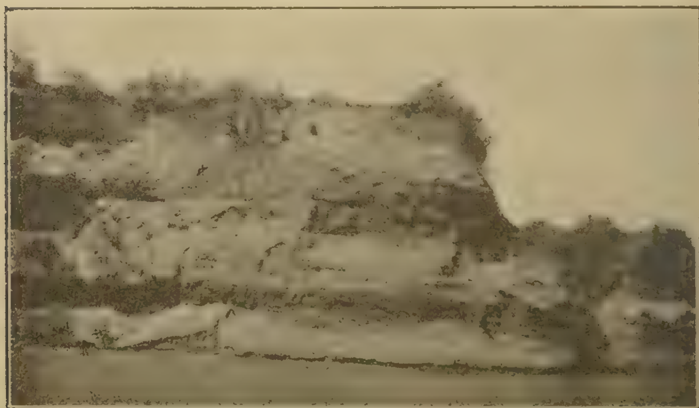


Fig. 5. — Punto Colorado, cerca de Santa Elena

En toda la extensión entre La Paz y Santa Elena predominan limo gris y tosca. El limo gris forma siempre la capa superior pasando paulatinamente al limo amarillo.

Los mismos fragmentos en parte son gris y en parte amarillo.

El yeso se encuentra en el limo gris en casi todo el trayecto de La Paz a Santa Elena. Cerca de Santa Elena existe una segunda fábrica de yeso bien instalada pero abandonada hoy. Fué calculada para una producción mensual de 500 toneladas.

De Santa Elena a Curtiembre hice el viaje en vapor. Se distinguían de lejos arena y limo amarillo. Las barrancas son de mayor altura

pero no superan, aparentemente, 20 metros. En Curtiembre se presentan, por lo general, las mismas relaciones estratigraficas. Yeso se encuentra en abundante cantidad. Es muy considerable la cantidad de tosca.

En la arena se observa claramente la estratificacion entrecruzada. En estas arenas se encuentra madera silificada en posición mas o menos horizontal (fig. 6).

La tosca que aparece en estos parajes inmediatamente debajo de la tierra humus de color claro, es de una dureza mayor que la normal



Fig. 6. — Estratificación entrecruzada

por la presencia de sílice, llama la atención por su forma fibrosa, con fibras entrelazadas.

Los espacios intermediarios entre las fibras están rellenos de limo gris. Allí donde el limo gris falta queda un calcáreo cavernoso; se trata, probablemente, del *calcaire claisonné* de d'Orbigny. Observando de cerca estas formaciones calcáreas se llega a establecer una relación entre éstas y las raíces de plantas que penetran a bastante profundidad en la roca. Suponemos que las soluciones de bicarbonato cálcico se infiltraban en los capilares de las raíces silificadas y encontramos cierta analogía en la formación de la tosca y la madera fósil.

Un proceso análogo observó Hauthal en las tierras de Olavarría. Se expresó al respecto en forma no muy clara (Rodolfo Hauthal, *Apuntes geológicos de las sierras de Olavarría. Publicaciones de la Universidad de La Plata,* nº 1, julio de 1901, pág. 21).

« Especialmente en las sierras Bayas el loess tiene un desarrollo grande y contiene aquí muchas concreciones calcáreas, loess kindel, *que son probablemente los rastros de raíces de plantas y de árboles.* »

Es interesante constatar que existe una relación genética entre la tosca y los vegetales, y no entre el loess y los vegetales como opina Roth.

En cuanto a la tosca, cuya errónea determinación contribuía mucho a confusiones estratigráficas, se seguía hasta ahora la tendencia de encontrar un origen único para toda la tosca en la República. Darwin pensó en el origen marino, Burmeister y Florentino Ameghino excluían la posibilidad de un origen semejante (1), admitiendo como causa de su formación las infiltraciones de bicarbonato cálcico en el limo pampeano.

Para Roth y para los partidarios del origen eólico del loess (limo pampeano), la tosca se produce por la descalcificación del loess (admite esta teoría algo que es difícil demostrar : la presencia de carbonato cálcico en el loess típico en gran cantidad).

Florentino Ameghino con mucha razón admite también la existencia de toscas *lacustres*.

Doering, por fin, atribuye la formación de la tosca a la descomposición química de rocas básicas que contienen Ca, debido a la acción de soluciones que contienen CO_2. Esto última teoría, quizá aceptable para algunos casos, es, en otros, totalmente inaplicable ; así, v. gr., en la provincia de Córdoba la formación de tosca no tiene relación directa con las descomposiciones de las rocas (aquí en su gran mayoría ácidas y no básicas) sino, de un modo que es imposible que se escape a la observación, de la *disolución* de rocas calcáreas que van concordantes con los esquistos cristalinos y que abundan en la sierra más de lo que generalmente se admite. Estas rocas calcáreas, verdaderos mármoles en su gran mayoría, debido a la acción metamórfica que contribuyó a su formación, se disuelven en su superficie

(1) Nosotros no excluímos del todo la posibilidad de la formación de una *tosca marina* : en sondajes practicados en el litoral de la provincia de Buenos Aires hemos obtenido muchos fragmentos que presentan un cambio paulatino de limos arenosos conchíferos a *verdaderas toscas,* donde los restos orgánicos ya no se distinguen. Admitimos, también, que el limo pampeano que corresponde a las últimas transgresiones marinas y contienen conchillas puede transformarse, por los agentes atmosféricos, en una tosca típica.

Pero nos parece completamente erróneo *generalizar* este posible origen marino a toda la tosca de la República.

por las aguas con CO_2 y se *depositan de nuevo en forma de verdaderas toscas,* sea sobre las mismas rocas calcáreas a mayor distancia o sobre rocas gneísicas, graníticas, etc.

La teoría de Doering puede ser parcialmente cierta.

Una teoría admisible sobre el origen de la tosca debe, en primer término, aclarar satisfactoriamente la procedencia del calcio. La teoría que relaciona la formación de la tosca a la presencia de material calcáreo en el loess primitivo, no se basa en ningún hecho observado.

La tosca, en los terrenos de Entre Ríos, se presenta indistintamente en el limo pampeano y en el limo gris, pero suponemos que no es coetánea a ninguna de estas capas, habiéndose formado *después* que el limo se depositó, siendo el resultado de un proceso diagenético. Nos parece erróneo hablar de una tosca belgranense y una tosca ensenadense (como lo hace Frenguelli). En muchos casos ha contribuído a la formación de la tosca de la provincia de Entre Ríos la vegetación.

De La Paz hasta Curtiembre no hemos observado barrancas de una altura mayor de 20 metros. Según el perfil de d'Orbigny al sur del arroyo Verde las barrancas alcanzarían una altura de *80 metros).*

En el perfil de d'Orbigny no está indicada la capa superior de limo pampeano. Aunque faltan en algunas partes es, por lo general, común a todo el corte, como lo pudimos observar nosotros.

Argile grise y *calcaire cloissonnée* no son formaciones distintas; la última roca es tosca y su posición inferior a la arcilla no permite hacer deducciones sobre su mayor edad geológica, como lo hemos explicado más arriba.

Por la formación diagenética de la tosca, por su paso paulatino al limo pampeano se ve un parentesco muy cercano entre ambas. En cambio, en el perfil de d'Orbigny están colocadas varias capas entre el argile gris y el argile pampeano.

Roth da la siguiente descripción de estos terrenos: « En las barrancas de La Paz los depósitos fluviales entrerrianos están formados de arena suelta con bancos de cuarcita y estratos de arcilla; los únicos fósiles que encontré aquí son troncos de madera silificada. Sobre los depósitos de la arena fluvial se encuentran capas de marga arenosa de color gris claro parecidas a las que Ameghino llamó lacustre, y encima de éstas sigue loess pampeano algo arenoso. La capa más superior está formada por una espesa capa de tierra humus. Hasta unas diez leguas en dirección a Paraná la constitución geológica no cambia mucho.

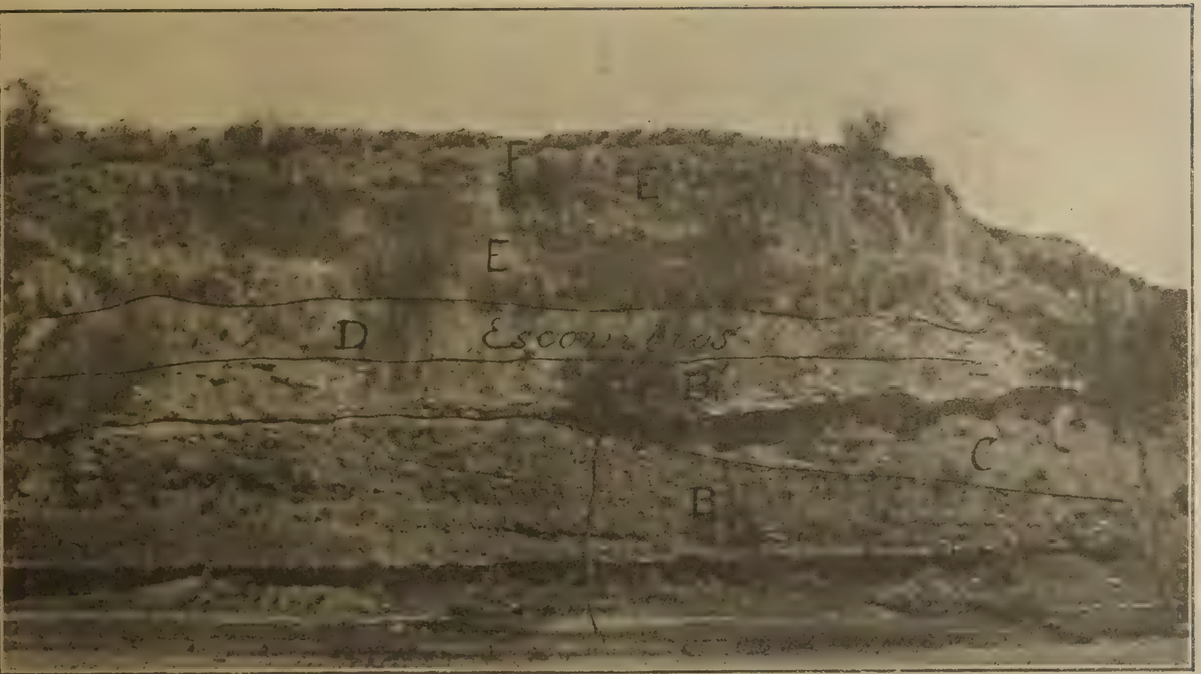


Fig. 7. — La misma barranca, aumentada

Antes de llegar a Santa Elena se encuentran las primeras capas con fósiles marinos, que aumentan gradualmente de espesor hasta la ciudad de Paraná, donde la formación entrerriana se compone únicamente de la facie marina. Este perfil geológico está más de acuerdo con el trazado por nosotros.

Marga arenosa de color gris claro de Roth equivale al argile gris de d'Orbigny, el *loess arenoso* a nuestro limo pampeano. En cuanto al loess que Roth menciona al norte de La Paz, no lo observé en la base de las barrancas, lo mismo que no lo observaron Bonarelli y Nágera.

Tampoco consideramos como demostrada la presencia de la formación de areniscas rojas en el puerto de La Paz, por no estar seguro que se encuentran allí *in situ*.



Fig. 8. — Estratificación diagonal en la barranca correspondiente a la calle Salta, ciudad de Paraná

En los perfiles del doctor Roth, de acuerdo con la escala de altura, también se podría pensar que la altura de las barrancas llege hasta unos 80 metros.

Éstas, sin embargo, en su parte más alta en Diamante, no sobrepasan los 47 metros y en La Paz y Santa Elena los 20 metros.

La localidad clásica, donde se observa con toda nitidez la formación marina entrerriana, en la ciudad misma de Paraná (fig. 8) (antigua Bajada). La calle Salta, al bajar al Puerto Nuevo, presenta una barranca cortada casi a pique de unos 70 metros de largo, donde se distinguen de abajo o arriba, las capas siguientes:

A, arena arcillosa fosilífera:

B, banco con *Ostrea pat.*, *Podedesmus papyraceus*, *Pecten*, etc.;

C, arena arcillosa fosilífera;

B_1, banco con *Ostrea pat.*;

D, arcilla gris con tosca clara, en parte estratificada;

E, arcilla gris con tosca;

F, humus.

El fósil característico es *Ostrea patagonica.*

B, el banco se compone al principio de *Ostrea pat.* y luego pasa a



Fig. 9. — Estratificación diagonal en las rocas calcáreas fosilíferas. Paraná

Podedesmus papyraceus pedrominantes, pero siempre acompañado de *Ostrea pat.*

El banco representa la estratificación entrecruzada (discordante) que es sumamente típica en todos los cortes de las barrancas.

En A, en el banco, se intercala arena arcillosa fosilífera y algo de arcilla gris amarilla con su tosca típica, caída por desmoronamiento de D.

No hay ninguna diferencia entre B y B_1; es el mismo banco.

Las capas del banco B con su característica sedimentación entrecruzada se presentan a veces onduladas.

En esta misma barranca, Frenguelli distingue las capas siguientes:

4 (1) arenas arcillosas del entrerriense, correspondiente a A en nuestro perfil;

(1) Número correspondiente a la nomenclatura de Frenguelli.

4*a*, banco de *Podedesmus papyraceus,* correspondiente a B ;
4*b*, arenas cuspidales del entrerriense, correspondiente a B ;
5, arcilla del ríonegrense terrestre, correspondiente a B ;
6, caliza de ríonegrense marino, correspondiente a B ;
8, tosca calcárea del araucanense, correspondiente a E ;
9, tosca calcárea hermosense, correspondiente a E.

La parte superior de los estratos inclinados (en 4*a*), dice Frenguelli, fué denudada y nivelada y luego, como muestra la fotografía (1), recubierta en discordancia por nuevos estratos calcáreos marinos horizontales (número 6). La constatación de este dato, aquí muy evidente por la discordancia de las capas sobrepuestas, es muy importante, etc. (pág. 92).

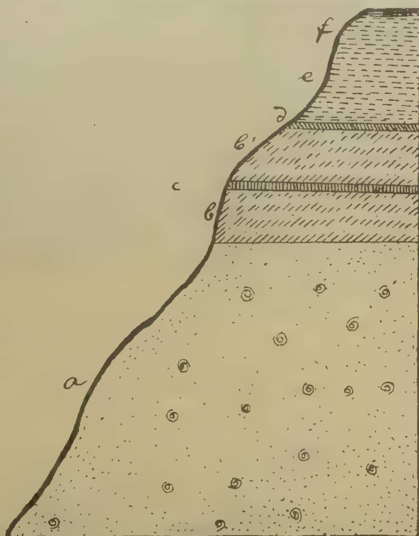


Fig. 10. — Barranca del Gasómetro : *a*, arena arcillosa con fósiles (*Ostrea pat.* y otros); *b* y *b'*, arcilla arenosa de color amarillo; *c*, roca calcárea; *d*, arenisca; *e*, roca calcárea ; *f*, tierra humus.

Frenguelli tomó la estratificación discordante por una discordancia. Su capa 6 es la continuación de la 4*a*, encierra los mismos fósiles (*Ostrea pat.*) y en nada se distinguen una de otra.

Como consecuencia, Frenguelli estableció una nueva formación, el ríonegrense marino, en una forma completamente arbitraria.

En la barranca del Gasómetro hemos observado las siguientes capas :

a, arena arcillosa con fósiles (*Ostrea pat.* y otros);
b, arcilla arenosa de color amarillo ;
c, roca calcárea, capa delgada de unos 15 centímetros ;
b_1, como *b*;
d, arenisca unos 30 centímetros ;

(1) La fotografía muestra una cosa muy distinta.



Fig. 11. — Barranca del Gasómetro



Fig. 12. — Arroyo por debajo de la cantera de Izaguirre : *a*, arena limosa fosilífera = banco calcáreo ; *b*, arcilla azul con fósiles ; *c*, arcilla amarilla ; *d*, roca calcárea

e, roca calcárea;

f, tierra vegetal.

Cortes interesantes se presentan en la cantera de Izaguirre, donde se explota el banco calcáreo.

Éste es de diferente espesor, alcanzando a unos 4 metros, y aun

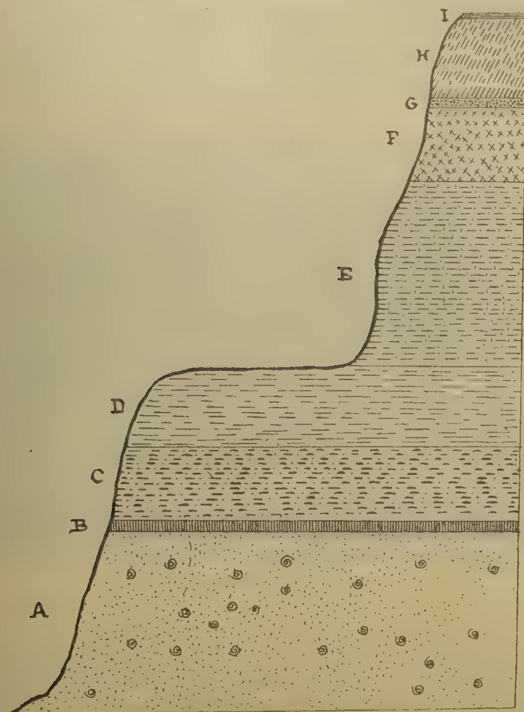


Fig. 13. — Perfil de la cantera de Izaguirre

más. Aquí observamos la misma estratificación entrecruzada, de que ya hablamos, muy bien desarrollada.

El banco parece algo abovedado por un posterior movimiento tectónico.

Una arena blanca, muy pura al parecer, está intercalada en el banco y en parte endurecida, forma una arenisca. Ambas, la arena y la arenisca, son mayormente estratificadas, como el banco calcáreo.

La arenisca se presenta en trechos; como la continuación del banco calcáreo; en otras partes le está sobrepuesto.

Encima del banco yace la arcilla gris. Los trabajos se hacen cavando galerías en esta última, empezando después la explotación hacia abajo.

A, arena limosa con fósiles, sobre todo *Ostrea patagonica;*

B, una delgada capa calcárea;

C, arcilla azul estratificada con fósiles bien conservados, muy frágiles *(Área bonplandiana* d'Orbigny);



Fig. 14. — Cantera de Izaguirre

D, arcilla amarilla estratificada;

E, roca calcárea y arenosa;

F, arcilla gris;

G, conglomerado de tosca;

H, limo pampeano;

I, tierra vegetal.

En Diamante (antigua Punta Gorda) grandes desmoronamientos dificultan la investigación. Enormes bloques de limo pampeano y de tosca desprendidos de la barranca llegan hasta la orilla del río. Hemos observado aquí las siguientes capas:

A, *arcilla gris obscura,* algo verde, cuando húmeda, de poco espesor (0,50 cm.) con conchilla frágil triturada, entre el Puerto Nuevo y el Puerto Viejo aparece en trechos muy reducidos;

B, pasa a la arena limosa en algunas partes directamente, en otras queda intercalado entre ambas un banco calizo silíceo, de mucha dureza con fósiles: *Pecten,* etc., y moldes de fósiles;

C, *arena arcillosa,* característica del entrerriano con fósiles. (*Ostrea,* etc.), contiene cristales de yeso, se vuelve, en parte, más rica en arcilla, y parece plástica;

D, *arcilla gris,* contiene mucha tosca blanquecina; en trechos ésta forma placas planas de muy poco espesor, orientadas en líneas paralelas y aparecen como estratificadas. El color cambia de gris a gris



Fig. 15. — Cantera de Izaguirre

verdoso. Cerca del Puerto Viejo esta roca está cubierta de un delgado sedimento de cloruro de sodio (1).

El desarrollo de esta capa es mucho mayor de lo que al principio se cree. La barranca casi a pique, de color amarillo pardusco, parece ser toda (exceptuando la base) de limo pampeano. Sin embargo es casi más que en su mitad formada de la arcilla gris, sólo que ésta parece cubierta por una delgada capa de limo pampeno que le da un color ajeno a su naturaleza.

Este fenómeno se produce probablemente durante las lluvias y demuestra otra vez la plasticidad del limo;

(1) Burmeister extraña no haber encontrado sales en las capas terciarias, y a base de eso duda del origen marino de la sal.

E, imposible indicar, por la razón expuesta, límites con D. *Es limo arenoso* (pampeano).

En el Puerto Viejo encontré restos fósiles de vertebrados sueltos pero en condiciones que permiten atribuir su procedencia al gris de *ossements* (son restos de peces envueltos en arenisco y cubiertos por cristales de yeso).

D, como E, contiene enormes cantidades de tosca que al parecer se



Fig. 16. — Perfil de la barranca en Diamante (entre el puerto Nuevo y el puerto Viejo): A, arcilla gris obscura con fósiles; B, banco calcáreo con fósiles; C, arena arcillosa con fósiles; D, arcilla gris con tosca estratificada; E, limo pampeano con tosca: F, tierra vegetal.

distingue por sus colores respectivos, color amarillento la del limo pampeano (muy duro) y color claro blanquecino o grisáceo la de la arcilla gris.

XI

DATOS PETROGRÁFICOS

1. *Limo pampeano* (loess neopampeano del doctor Roth). — Hemos observado esta roca, con pocas interrupciones, desde La Paz hasta Diamante. Su espesor varía mucho: es, sobre todo, muy difícil indicar su límite inferior con la arcilla gris *(argile grise* de d'Orbigny, marga

lacustre del doctor Roth) a la que pasa en algunas partes insensiblemente. Muchas veces, como en Diamante, el limo pampeano cubre la arcilla gris con una delgada capa (efecto de las lluvias); entonces aparece, a simple vista, de un espesor mayor del que le corresponde.

Calculamos el espesor máximo de esta capa en unos 25 metros.

La roca es de color amarillo, algo rojizo (sin la estructura porosa que Roth considera típica para el loess), da eflorescencia con HCl: pero el carbonato cálcico no está uniformemente repartido, existiendo en la masa partículas blanquecinas donde el carbonato cálcico se encuentra concentrado. Es un limo arenoso, con algo de arcilla, de grano muy fino, algo consistente por la arcilla, con tiene manchas negras (probablemente dudritas, formadas por infiltraciones de óxido de hierro y de óxido de manganeso. No tenemos ningún análisis químico completo del limo pampeano de esta región (desde La Paz hasta Diamante). En cambio, se han hecho análisis químicos del limo pampeano más al sur de Diamante (he reunido los datos en una tabla, pág. 311, *Revista del Museo de La Plata*, t. XXVI.)

El limo pampeano de Rosario (analizado por W. Meigan y P. Werling), está compuesto en la forma siguients:

SiO_2	65.5 %
Al_2O_3	15.6
Fe_2O_3	6.7
CaO	2.1
MgO	1.4
K_2O	1.6
Na_2O	3.1
TiO_2	1,1
Pérdida al rojo	3,4

El limo, casi invariablemente, contiene tosca, muchas veces del mismo color que el limo, pero de mayor dureza. Esta tosca forma concreciones irregulares, de tamaño muy diferente. Grandes bloques de tosca, arrastrados por la erosión, se encuentran al pie de la barranca. En algunas partes la tosca aparece estratificada. El limo pampeano contiene en algunas partes (como en Santa Elena) yeso. *Magnetita* en mayor o menor cantidad, casi en todo el limo pampeano.

Análisis de una tosca de Rosario (por Doering)

Arena y arcilla	22,80 %
Óxido de manganeso	0,39
Óxido de calcio	40.79

Óxido de magnesio	0,80 %
Ácido sulfúrico	0.31
Ácido carbónico	32.62
Agua, pérdida, etc	2,29

2. *Arcilla gris (argile grise* de d'Orbigny, marga limosa de S. Roth). — De color gris, gris claro, gris amarillento, presenta la capa que sigue inmediatamente al limo pampeano. Es arenosa, atravesada por dendritas; en algunas partes el tránsito entre ambas capas es insensible, en otras, como en la cantera de Izaguirre, una tosquilla no cementada de fragmentos redondeados e irregulares separa ambas capas. Común al lino pampeano y a la arcilla gris es el contenido de tosca.

Se presenta aquí, también en forma de loess, concentrado en la parte inferior en forma de bancos irregulares, a veces con marcada estratificación.

Más resistente a la erosión, la tosca de la arcilla gris, que se distingue mayormente de la tosca del lino pampeano, se encuentra en enorme cantidad al pie de las barrancas.

Esta roca es más rica en yeso que la anterior.

3. *Arenas.* — Se presentan casi siempre con la estratificación discordante de color amarillo rojizo, pardo, con partes obscuras por el contenido de magnetita; también hay arenas de color enteramente blanco (cantera Izaguirre). Con lente se distinguen granos blancos transparentes, blancos opacos, amarillos pardos, rojizos y negros. Mayormente no da eflorescencia con HCl.

Microscópicamente los granos de cuarzo se presentan mayormente fracturados. En las fracturas se han infiltrado soluciones de óxido de hierro hidratado, ensanchándolas, probablemente. Muchas veces se observa en los granos de cuarzo la extinción ondulosa. Además de cuarzo y arcilla se pueden distinguir los siguientes minerales : *microclino, calcita* (raro), *magnetita* (común), *calcedonia, lagioclasa* (muy rara), *limonita* y *hematita, biotita* (rara), *vidrio volcánico, honblenda* y *augita* (raras).

4. *Rocas calcáreas.* — Arenisca calcárea, o caliza arenosa con dibujos dendríticos. Los moldes de fósiles son cubiertos de cristales de calcita, al romper la masa se distinguen pequeños fragmentos de yeso. La roca es, en parte, de mucha dureza, por la gran cantidad de granos de cuarzo que contiene.

En Bajada Grande la roca se presenta de color blanco grisáceo con numerosos moldes de moluscos de pequeño tamaño. La roca es po-

rosa y está revestida, en la superficie y en los poros, por cristales de calcita apenas visibles a simple vista, bien distinguibles con lente de 10 X. La roca produce la impresion de una brecha: contiene fragmentos angulares de cuarzo, pocas veces visibles a simple vista, bien distinguibles con lente de 10 X. Pequeñas manchas dendríticas. Aisladamente se encuentra en la roca moluscos fosiles. Es de suponer que en la formación de esta roca hayan intervenido procesos diagenéticos.

La roca calcárea, en la barranca del Gasómetro (Paraná) aparece inmediatamente debajo de la tierra vegetal, presenta una masa compacta y se compone de granos redondeados, a veces angulares, visibles con lente, encierra moldes de pequeños individuos de invertebrados fósiles, aisladamente también conchillas fósiles.

En Diamante, la arenisca calcárea contiene numerosos restos de conchas de moluscos fósiles, bien conservados. La roca de mucha dureza, está formada por granos de cuarzo, cementados por carbonato cálcico.

5. *Arenisca.* — Roca formada por el tránsito de las areniscas calcáreas y calizas arenosas, de color blanco o gris amarillento. Los granos de cuarzo son bien visibles bajo aumento. 10 X. Es algo porosa, poco consistente, contiene moldes de fósiles. En algunas partes está cubierta por yeso. De poco espesor.

6. *Arcilla verdosa* (sobre todo en estado húmedo). — Contiene fósiles invertebrados, en mal estado de conservación (en Diamante); pero en la barranca de Izaguirre contiene fósiles bien distinguibles de *arca bonplandiana.* Es de poco espesor (1 metro aproxim.).

7. *Arcilla amarilla o parda estratificada.* — En la base de las barrancas, entre La Paz y Santa Elena, algo arenoso, con manchas dendríticas (el loess inferior del doctor Roth).

XII

EDAD GEOLÓGICA

Si todos los juicios coinciden en atribuir a la formación entrerriana la edad terciaria, los límites del terciario en que se ubica esta formación varían del eoceno hasta plioceno. Los diferentes juicios son generalmente el resultado de la diferencia en el método aplicado:

los que determinan la edad geológica de acuerdo con la fauna fósil de los vertebrados, asignan a los terrenos fosilíferos de Paraná una edad muy elevada : del mioceno hasta el eoceno; en cambio los que determinan la edad geológica, de acuerdo con la fauna fósil de los invertebrados, atribuyen a la formación entrerriana la edad pliocena.

« Cuando los resultados de los estudios de los vertebrados o invertebrados difieren — dice Em. Haud, — hay que dar preferencia a los últimos » *(Traité de Geologie,* pág. 553).

De acuerdo con este criterio, hay que atribuir la formación entrerriana al plioceno (1).

El inconveniente que resulta de tal determinación de hacer rejuvenecer la fauna fósil de los vertebrados del entrerriano y del pampeano, es menos grande que el inconveniente de establecer la antigüedad de estas formaciones por esta fauna fósil exclusivamente y en contradicción con los datos que suministran los fósiles invertebrados.

La subdivisión de los terrenos de Entre Ríos dada por Frenguelli no nos parece demostrada.

XIII

CONCLUSIONES

1ª Las relaciones estratigráficas, donde las hemos estudiado, están, esencialmente, como las indicó Darwin.

Si los posteriores estudios han contribuído a aumentar la lista de los fósiles invertebrados, esto no ha podido modificar el perfil geologico, exactamente trazado por Darwin;

2ª Darwin tuvo razón en no considerar la tosca como un tránsito entre la formación marina y el limo pampeano; pero de acuerdo con los conceptos actuales sobre la tosca, debemos considerarla como capa inferior del pampeano, y no como capa superior de los depósitos marinos;

(1) Nosotros hemos encontrado los siguientes fósiles : *Podedesmus papyraceus* (Phil.), *Ostrea patagonica* (d'Orb.), *Ostrea Alvarezii*, *Ostrea Philipii* (Ortm.), *Cytherea oblonga* (Phil.), *Venus Muensterii*. Véase también *Monte Hermoso*, página 296. *Venus paranensis*, *Pectunculus symmetricus*, *Venericardia crassicosta* (Borch), *Cardium Bravardi* (Phil.), *Crepidula paranensis*, *Pecten paranensis*, *Monophora darwiniana*, *Arca Bouplandiana* (d'Orb.), *Ammurium darwinianum* (d'Orb.), *Bryozoarios* (Ort.), *Balanus*, *Turitella americana*.

3ª Existe un tránsito paulatino entre el *argile gris* y el limo pampeano y es muy probable que ambas rocas se hayan formado en lagunas;

4ª La naturaleza petrográfica de las arenas terciarias es muy diferente de la naturaleza petrográfica de las arenas actuales, del zocalo marino;

5ª Existe una diferencia petroquimica entre el limo del litoral marítimo y el limo de la costa del río Paraná;

6ª La formación entrerriana es el limite inferior del pampeano y pertenece al plioceno.

XIV

BIBLIOGRAFÍA

1. AMEGHINO, FL., *L'âge des formations sédimentaires tertiaires de l'Argentine*, en *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires*, tomo XXII, 1911.

2. AMEGHINO, FL., *Les formations sédimentaires du Crétacé supérieur et du Tertiaire patagonien*, en *Anales del Museo Nacional*, serie 3ª, tomo III, Buenos Aires, 1906.

3. BRAVARD, A., *Observaciones geológicas sobre diferentes terrenos de transporte de la hoya del Plata*, Buenos Aires, 1857.

4. BRAVARD, A., *Monografía de los terrenos marinos de las cercanías de Paraná, 1858*, en *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires*, tomo III, Buenos Aires, 1883-1891.

5. BURMEISTER, H., *Description physique de la République Argentine*, tomo II, página 219 y siguientes, París, 1876.

6. BURMEISTER, H., *Reise durch die La Plata-Staten mit besonderer Rücksicht auf die physische Beschaffenheit und den Culturzuland der Argentinischen Republik, ausgesfuhrt in den Yahren 1857, 1858, 1859, 1860*, Halle 1861, página 411, en *Anales del Museo Público de Buenos Aires*, tomo I, página 118.

6. BONARELLI Y NÁGERA, *Informe preliminar sobre un viaje de investigación geológica a las provincias de Entre Ríos y Corrientes*, en *Boletín del Ministerio de Agricultura*, tomo XVI, número 1, julio de 1913.

8. BORCHERT, *Die Molluskenfauna un das Alter der Paraná. Stuf. Neues Yarhbuch für Mineralog, etc.*, B. B. XIV, Stuttgart, 1901.

9. DARWIN, C., *Geologische Beobachtungen ueber Süd-America*. Edición alemana de J. Victor Carus. 2te. Anflage. Stuttgart, 1899.

10. DORING, A., *Informe oficial de la Comisión científica agregada al estado mayor general de la expedición al Río Negro*, entrega III. *Geología*, 1882.

11. DORING, A., *Las toscas calcáreas y su aplicación para la fabricación de cemento y cales hidráulicas*, en *Boletín de la Academia Nacional de Ciencias de Córdoba*, tomo XII, 1890.

12. FRENGUELLI, J., *Contribución al conocimiento de la Geología de Entre Ríos*.

en *Boletín de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba*, tomo XXIV, 1920.

13. HAUG, E., *Traité de Géologie*, troisième tirage, París, 1921.

14. HANTHAL, R., *Apuntes geológicos de las sierras de Olavarría, Universidad de La Plata*, número 1, julio, 1901.

15. VON IHERING, H., *Les mollusques fossiles du tertiaire et du crétacé supérieur de l'Argentine*, en *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires*, serie 3ª, tomo VII, 1907.

16. KAYSER, E., *Lehrbuch der allgermeinen Geologie*, Stuttgart, 1912.

17. KANTOR, M., *Recherches océanographiques sur le litoral maritime de la province de Buenos Aires* (communication preliminaire), en *Anales de la Sociedad científica argentina*, tomo LXXXVI, 1919.

18. KANTOR, M., *Monte Hermoso, en relación con el origen del limo y loess pampeano*, en *Revista del Museo de La Plata*, tomo XXVI, página 281.

19. KEIDEL, J., *La geología de las sierras de la provincia de Buenos Aires*, en *Anales del Museo de Agronomía*, XI, 3, 1916.

20. D'ORBIGNY, A., *Voyage dans l'Amérique méridionale*, tome 3me, 3me partie, *Geologie*, París, 1842.

21. ROTH, S., *Beobachtungen über Entstehung und Alter der Pampasformation in Argentinien.*

22. ROTH, S., *Beitrag zur gliederung der Sedimentablagerungen in Patagonia u. der Pampasregion*, en *Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie u. Paleontologie*, Stuttgart, 1908.

23. ROTH, S., *Investigaciones geológicas en la llanura pampeana*, en *Revista del Museo de La Plata*, tomo XXV, Buenos Aires, 1921.

24. STAPPENBECK, R., *Resultados geológicos de algunas perforaciones en las provincias orientales de la Argentina*, en *Boletín del Ministerio de Agricultura*, tomo XVI, número 4, Buenos Aires, octubre de 1913.

25. STELZNER, *Beiträge zur Geologie de Argentinische Republique*, Berlín, 1882.

26. WALTHER, K., *Sobre la edad y el carácter geológico de la «formación pampeana» en el Uruguay*, en *Publicaciones del Instituto Nacional de Agronomía*, seccion Mineralogía, etc., Montevideo, 1915.

27. WALTHER, K., *Los fundamentos de la estructura geológica de la República Oriental del Uruguay*, en *Revista del Instituto de Agronomía*, segunda serie, número 3, Montevideo, 1919.

28. WALTHER, K., *Estudios geomorfológicos y geológicos*, Montevideo, 1924.

29. WINDHAUSEN, A., *The problem of the Cret. Tertiary Boundary, in S. America*, en *Am. Journal of Sciences*, XLIV, Jan. 1918.

30. WINDHAUSEN, A., *Rasgos de la historia geológica de la planicie costanera en la Patagonia septentrional*, en *Boletín de la Academia Nacional de Ciencias de Córdoba*, 1918.

31. WICHMANN, R., *Geología e Hidrografía de Bahía Blanca y sus alrededores*, en *Anales del Ministerio de Agricultura*, sección Geología, tomo XIII, número 1, Buenos Aires, 1918.

32. WILKEUS, O., *Die Meeresablagerungen der Kreide und Tertiärformation in Patagonien*, en *Neues Jahrb. für Mineralogie*, etc., Beil. Band. XXI, 1905.

33. WINDHAUSEN, *Informe sobre un viaje de reconocimiento geológico en la parte nordeste del territorio del Chubut*, en *Boletín del Ministerio de Agricultura, Direccion General de Minas*, serie B, 1921.

LA EXPLORACIÓN DE LA LAGUNA IBERÁ

Por el ingeniero ANTONIO PAULY

En el mes de noviembre de 1923 firmé un contrato con una comisión francesa, por el cual fuí encargado de practicar un prolijo estudio topográfico en la laguna Iberá, que comprendía toda la región entre ella y el río Paraná hacia el norte y los ríos Uruguay y Aguapay hacia el este.

En los últimos días de ese mes me embarqué para Corrientes, pasando por Federación, y durante el viaje por ferrocarril tuve ocasión de ver la parte sur de dicha laguna, que nos ofreció en el crepúsculo un cuadro espléndido: el cielo iluminado por los últimos rayos solares se reflejó en las aguas obscuras y las palmeras se destacaban como sombras negras del firmamento rojo.

Después de varios días de estada en la capital correntina, para réunir todos los datos posibles, tomé el vapor que me condujo a Posadas, para completar mis estudios y regresar a Ituzaingó, para emprender la exploración.

Los otros miembros de la comisión se habían repartido a fin de practicar algunos viajes de estudio y reunirse después en Posadas, donde esperaban los resultados de mis levantamientos topográficos.

A las nueve de la mañana salí de Ituzaingó (el 1° de diciembre de 1923) con una carreta de bueyes, cargada de provisiones, carpa e instrumentos, acompañado de tres peones, para emprender la marcha a la laguna Iberá. Ya a poca distancia de Ituzaingó, el camino cruza la zanja de San Lorenzo y sigue por los bañados, partes bajas del terreno que durante el tiempo de las lluvias están cubiertos por las aguas.

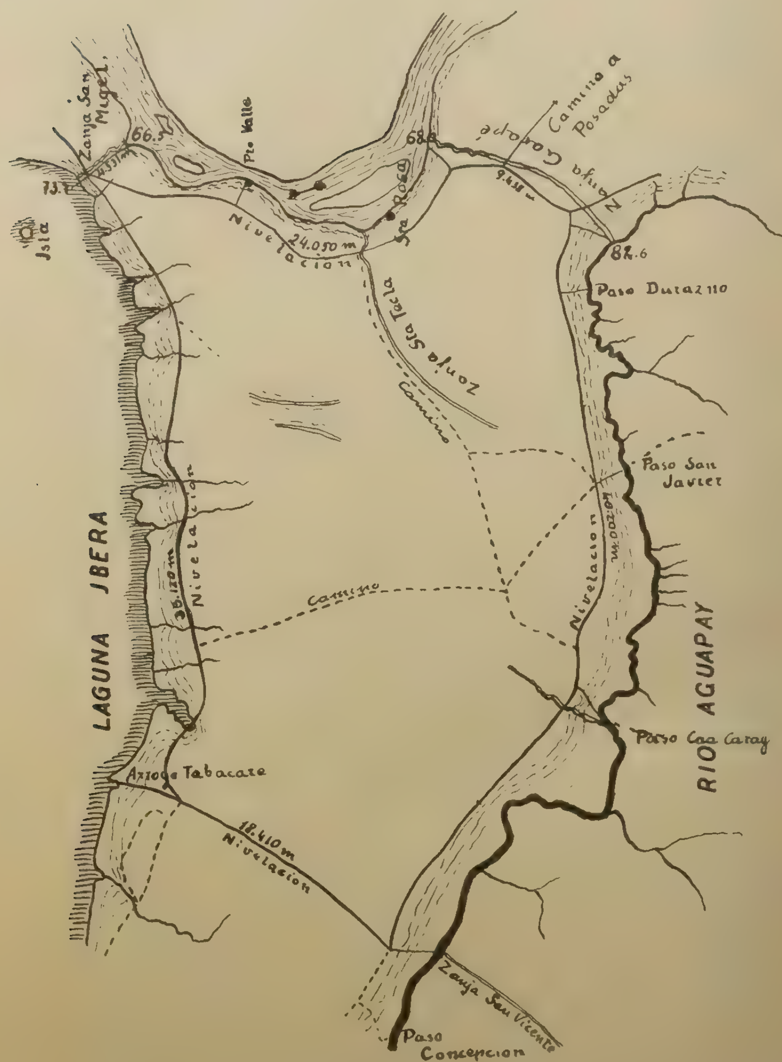


Fig. 1. — Croquis de la región explorada

Al caer la noche llegamos a nuestro destino, la zanja San Miguel, donde debía empezar mi tarea. El primer objeto era levantar un perfil entre el río Paraná y la laguna, para conocer la altura relativa de sus niveles de agua y estudiar sus relaciones recíprocas.

Como no habían llegado las miras de Buenos Aires, había comprado dos tablones en Ituzaingó, que pintamos con sapolín para servirnos de ellas hasta que llegáran las verdaderas.

La parte entre el camino carretero que conduce de Ituzaingó a Posadas y la orilla de la laguna no ofrecieron ninguna dificultad, pero la orilla del río Paraná está cubierta por un denso bosque en un ancho de un kilómetro aproximadamente y hubo que hacer una vuelta y aprovechar una parte despejada para la nivelación.

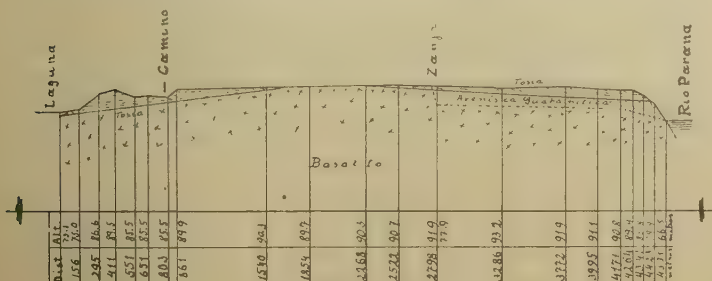


Figura 2

Como no existe allí ningún punto de referencia y ningún nivel oficial tuve que nivelar hasta Puerto Valle, donde se encuentra una escala de prefectura, cuyo nivel nos había indicado la oficina de Corrientes. Puerto Valle dista unos 15 kilómetros de la zanja San Miguel, y la nivelación la efectué a lo largo del camino, para referir mis alturas a los datos oficiales del Ministerio de Obras públicas (altura 65,52 metros).

El resultado de mis levantamientos fué muy interesante, como se puede ver en el croquis de la figura 1 y en los perfiles adjuntos.

El corte de la figura 2 demuestra que la teoría, según la cual la laguna Iberá es el antiguo lecho del río Paraná, tiene poca probabilidad de ser verídica. Como se ve, existe una loma de basalto entre ambos. Sobre esta loma se encuentran sedimentos de la época cretácea, areniscas guaraníticas amarillas, que se encuentran también en la orilla izquierda del Paraná. Estas areniscas están a su vez cubier-

tas por sedimentos más recientes, que forman toscas, que quizá pertenecen al terciario.

Por el lado de la laguna, la tosca está muy descompuesta por el agua y forma una capa de greda impermeable, que causa el estancamiento de las aguas que forman la laguna en la actualidad.

Tampoco existe una comunicación entre el río Paraná y la laguna, sino que la Iberá es completamente independiente del río y debe sus aguas únicamente a las lluvias, cuya altura anual es de 1300 milímetros.

Una lluvia de 100 milímetros de altura, caída sobre el área de la laguna, aumentaría el volumen en 450 millones de metros cúbicos, pues la Iberá cubre una área aproximadamente de 4500 kilómetros cuadrados.

Esta cantidad de agua alimentaría, si suponemos que la mitad se pierde por evaporación, 5000 metros cúbicos de agua por minuto, para que el nivel de la laguna quede a la misma altura anterior. Hay que advertir que este cálculo es muy moderado, pues la cantidad de lluvia que cae es mayor, así, por ejemplo, se calcula la altura de lluvia anualmente en 1600 milímetros.

Para darme cuenta de la estructura geológica, tuve que buscar una parte, donde el agua había quitado la tierra, de manera que los estratos estaban visibles. Encontré tal punto algo alejado de la laguna, en la orilla del Paraná, donde pude observar la superposición siguiente:

	Metros
Tierra vegetal negra, espesor............	0,3
Tierra gredosa negra, espesor............	0,5
Tosca colorada, muy dura, espesor.......	1,1
Arcilla colorada, muy dura, espesor......	0,5
Arena gruesa, espesor....................	0,8
Basalto algo descompuesto, muy duro.	

En el punto A del corte, las aguas de erosión han cavado una honda zanja en la tosca y han llevado gran parte de la arcilla, encontrándose en algunas partes, en el fondo, el basalto algo descompuesto. En este punto pude comprobar un espesor de la formación guaranítica de más de 14 metros.

Debido a la vuelta que tuve que hacer para llegar al río con mi nivelación, el perfil resulta aproximadamente 400 metros más largo que lo es la distancia recta entre la laguna y el río. También demuestra una colina entre el punto A y el río, que no existe en realidad.

La siguiente tarea, después de haber establecido el nivel de la laguna sobre las aguas del río, fué explorar su interior.

Desde el punto donde se estableció el nivel, vimos una isla con una alta palma y un pequeño bosque. Una triangulación dió una distancia de 4667 metros desde la orilla.

Resolví tomar esta isla como punto de apoyo para mi reconocimiento y nos fuimos hacia ella.

Empleamos en vencer estos 4,7 kilómetros que nos separaron de ella ocho horas, y llegamos tan rendidos que nos dejamos caer al suelo, sin ganas de comer ni de desvestirnos, nos envolvimos en nuestros ponchos y nos acostamos al suelo, sin cuidar de las víboras que pudieran estar allí. A la mañana siguiente tuvimos las caras y las manos hinchadas por las picaduras de mosquitos pues no habíamos tendido los mosquiteros.

La laguna es, en su parte septentrional, lo que se llama un « bañado », las plantas de paja forman pequeñas islas, rodeadas de pequeños canales de agua, y como toda la tierra es gredosa, ésta tiembla al pisar, debido a su saturación por el agua. Para avanzar hay que saltar de una planta a otra y muchas veces el pie resbala y la persona cae en el canal, lleno de agua y fango, donde se hunde poco a poco. El barro entra en todas partes, en las botas, los pantalones, y cuando los compañeros lo han sacado después de mucho trabajo, la víctima queda tan enlodada que casi no puede caminar.

Tal percance nos sucedió muchas veces al día y nuestros jalones, que llevábamos en guisa de bastones, nos servían para mantener el equilibrio durante los saltos y afianzarnos en una caída.

Puede imaginarse nuestra fatiga cuando llegamos después de ocho horas de continuo viaje a la isla.

Corre el rumor de que estas islas se mueven y cambian de sitio, y me parecía interesante estudiarlas.

Las islas, es decir, las verdaderas islas que tienen árboles, no se mueven, y ninguna de ellas en la parte norte de la laguna se movió durante nuestra estada. Lo que sucede es que el terreno, empapado por el agua, es muy blando, y cuando el viento sopla en las copas de los árboles la tierra tiembla y se siente una especie de vibración del suelo.

Según mis investigaciones, estas islas deben su existencia a pequeñas alturas del fondo, formadas por la roca basáltica. Sobre estas alturas o montículos, la greda o la tierra podían resistir a la acción del agua.

El agua y fango en el centro de la laguna tienen una profundidad de tres metros, y en ninguna parte del norte he podido comprobar una profundidad mayor. El jalón entraba en muchas partes hasta la punta (tenía un largo de 2 1/2 metros), pero en las proximidades de las islas, y en ellas mismas, el jalón no se podía hundir mucho, sin encontrar pronto una resistencia.

El corte de la figura 3 demuestra esto de un modo evidente.

Al día siguiente procuré avanzar más y llegamos a otra isla, distante tres kilómetros de la primera, de modo que nos encontramos aproximadamente en la cuarta parte del ancho de la laguna Iberá. Como empezó a llover regresamos a nuestro campamento, reservándome una mejor exploración para más tarde, cuando tenga que volver otra vez a la laguna a hacer el perfil entre el río Aguapay y la laguna Iberá.

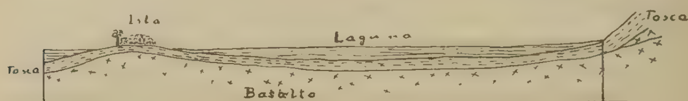


Fig. 3. — Corte de una sección ideal de la laguna

Era menester irme para nivelar el terreno entre el Paraná y el Aguapay y entre este último y la laguna Iberá.

Levantamos nuestro campamento de la zanja San Miguel, que por las lluvias de tres días había quedado en medio del agua, y tanto nuestros vestidos como las provisiones quedaron húmedas y la carne y las galletas medio enmohecidas.

La segunda etapa fué seguir la orilla de la laguna hasta llegar al arroyo Tabaré para cruzar de aquel punto al río Aguapay, y alcanzarlo cerca del paso Concepción, para establecer el desnivel entre esos dos puntos.

Como llovía todo el tiempo, los caminos estaban convertidos en ríos y por los rastros que dejaron las carretas en el suelo, ahondadas por el tráfico secular, corría el agua; toda la Pampa estaba en ciertos sitios cubierta de este líquido, sobre cuya superficie flotaban las plantas acuáticas. Los caminos se destacaban únicamente por la superficie del agua menos cubierta de plantas.

La carreta se hundía a veces hasta los ejes, y un día se volcó rompiendo todo lo que tenía en mi maleta, incluso las botellas con agua de la laguna que hubiera querido llevar a Buenos Aires, para poder analizarlas en cuanto a la vida animal y vegetal que contienen.

aunque creo que debe ser poca, pues el agua tiene color café negro y su gusto es ácido por el humus disuelto en él.

Puede imaginarse lo difícil que resultó la tarea de practicar una nivelación de esos parajes. El trípode del instrumento estaba a veces en el agua hasta la mitad, hundiéndome muchas veces al día hasta la cintura para poder efectuar la nivelación, y lo mismo mis ayudantes; para que la mira no se hundiera en el fango tuve que clavar una tablita debajo de ella, para hacerla girar sobre este zócalo.

Siempre que pudimos, escogimos la parte más alta del terreno para la poligonal y seguimos la línea telegráfica.

Como queda dicho, el agua tenía un color pardo, debido a las substancias orgánicas disueltas, y como tuvimos que lavarnos diariamente con ese elemento, nuestro cuerpo y nuestra ropa tomaron un color amarillo. Lo mismo sucedió con el arroz y los fideos que tuvimos que cocinar en este líquido. La primera vez que ví la olla con esta agua hirviendo, pensaba que era café y sentí mucho placer con la idea de calentar mi cuerpo frío y húmedo con una taza de este brebaje, pero mi cocinero me dijo que era el agua para hacer la sopa.

Aunque no soy zoólogo ni botánico, pensaba recoger muestras de plankton, y para poder llevar la fauna microscópica de la laguna a Buenos Aires llevaba botellas con una solución de formol, pero debido al accidente mencionado fracasó mi intención.

De los animales, vimos cerdos monteses, pequeños ciervos, llamados « cabras del monte », aves acuáticas y yacarés, cuya cola nos sirvió de alimento. Serpientes pueblan las aguas e islas de la laguna.

Es demás decir que los cuentos sobre ganado alzado y animales feroces, indios salvajes y demás cosas son un mito.

Bien se encuentran huesos de animales prediluvianos, pertenecientes a la formación pampeana.

Alrededor de la laguna, como en toda la provincia de Corrientes, abundan los montículos de tierra endurecida construídos por las termitas. Muchas veces tuvimos que destruirlos a fuerza de pico para dar paso a la carreta.

EL PERFIL PARANÁ-AGUAPAY

Llegados al Aguapay, subimos a lo largo del río hasta la zanja Garapé, para emprender la solución del tercer problema: observar la altura relativa entre el Paraná y el Aguapay, afluente del río Uruguay (perfil de la figura 4).

El nivel del río Aguapay se encuentra sobre la cota 83, encima del cero del Riachuelo, mientras que el nivel del río Paraná está a 68 metros. Es decir, el río Aguapay es 15 metros más alto que el río Paraná. Entre ambos ríos se extiende una loma formada por basaltos, cubiertos de areniscas y toscas que llega a una altura de 91 metros. Esta parte está cubierta por bañados y para desecarla construyeron los jesuítas la zanja, que no se extiende hasta el río Aguapay, sino baja únicamente de las lomas del Paraná.

Para poder establecer la altura de las aguas del Paraná fué necesario practicar otra nivelación hasta Puerto Valle, lo que me dió ocasión de comprobar la exactitud de la medición de todo el recorrido, de aproximadamente 200 kilómetros.

Sobre las dificultades de esta nivelación, especialmente a lo largo

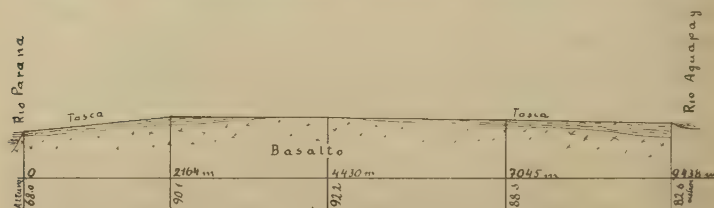


Fig. 4. — Perfil entre el río Paraná y el río Aguapay

del río Aguapay, no diré mucho, pues sería repetir todo lo dicho a propósito de la laguna Iberá. Baste saber que durante este tiempo llovió todos los días, los terrenos estaban cubiertos de agua, que llegó a veces hasta las rodillas y nos mojamos continuamente. Al fin, en la tarde del 31 de diciembre, después de un mes de arduo trabajo, terminé mis estudios y me fuí a Posadas para presentar mis informes a la comisión, con cuyo motivo celebramos las despedida del año viejo con una botella de champagne.

También, este corte demuestra la existencia del basalto en forma de una meseta entre el río Paraná y el Aguapay.

El desnivel del río Aguapay es de 14 centímetros por kilómetro y su altura en el paso de Concepción queda a 76,0 metros (1).

Había pensado volver a la laguna para terminar mi trabajo, pero la comisión me encargó de efectuar otros estudios en el río Uruguay y en algunos de sus afluentes, de modo que no pude efectuar la tra-

(1) La altura de la laguna Iberá en el paso Tabacaré es de 58 metros.

vesía como deseaba y tampoco pude terminar la nivelación hasta el río Corrientes.

Sin embargo aproveché los días de carnaval, dos meses después. para efectuar un viaje a Mercedes y a la parte sur de la laguna.

La parte sur difiere mucho de la del norte; existen muchas partes con aguas cubiertas y los habitantes de los alrededores han practicado canales en ellos para proveerse de madera, etc., que existe en las islas cercanas. Allí la profundidad es algo mayor y he medido hasta 5 metros. Gran parte de la laguna está cubierta de gramalotes, cañas, plantas acuáticas y ramas de árboles, que forman un espeso tejido que dificulta mucho el avance de la canoa.

Estos gramalotes son también el origen de la idea de las islas flotantes, pues ellos se mueven con el viento y se corren de un lado hacia otro. Las islas que tienen vegetación y árboles no se mueven nunca ni en la parte norte ni en la del sur.

El fondo es el mismo, como el descrito en la primera parte.

Uno de los problemas más interesantes es el de la desecación, y por esto dediqué algún tiempo a estudiar el régimen del agua (1).

Si consideramos la altura de lluvia de 1300 milímetros al año y la dtferencia psicométrica, que es de 2.1 centígrados, obtenemos una evaporación teorética de 4 milímetros al día o 1400 milímetros al año, lo que haría desaparecer todo el agua de lluvia en el mismo año en que cayó.

La espesa vegetación proteje la superficie del agua e impide al viento arrastrar el aire saturado de humedad próximo a la superficie del agua, entre las mismas gramíneas. Esta protección es tal, que no he podido observar una diminución del agua en una bandeja que estaba tres días expuesta al aire, escondida entre las cañas.

El aporte de agua anual puede estimarse en 6.500.000.000 metros cúbicos. Si los ríos Corrientes, Santa Lucía y Miriñay no llegan a desaguar la laguna, es porque el poco declive del suelo, 10 centímetros por kilómetro de largo de la laguna y los juncales y plantas acuáticas forman una especie de barrera, que se podría comparar con una «barrera de agujas» que produce un remanso.

He podido comprobar esta resistencia que ofrecen los juncales en los esteros del río Aguapay, donde un desnivel de 20 centímetros por kilómetro no era suficiente para producir una corriente visible.

(1) Existen en la parte sur de la laguna algunas escalas para medir el agua, construídas, como se me ha dicho. por el ministerio de Obras Públicas.

La corriente medida daba únicamente 12 centímetros por minuto

El primer trabajo para desecar la laguna sería de practicar canales en ella, por los cuales el agua podría escurrirse. Estos canales debieran tener una capacidad para poder llevar 700 metros cúbicos por segundo; teniendo, con una velocidad de la corriente de 0,5 metros por segundo, un ancho de 500 metros por 3 de hondo. Tomando en cuenta el actual cauce de los ríos Corrientes, Miriñay y Santa Lucía la excavación a efectuar sería de 800 metros cúbicos por metro corrido, lo que se podría hacer fácilmente con dragas. No se podría pensar en desaguar la laguna por la parte norte, aunque el río Paraná se encuentra únicamente a una distancia de 4500 metros, pero primero, el desnivel natural hacia el sur impediría que se escurra todo el agua y segundo, sería muy costoso un canal de suficiente tamaño por la loma de basalto.

EL VUELO PLANEADO

Por LUIS M. DINELLI

Escribiendo en los *Anales de la Sociedad científica argentina* es importante no prescindir de los nombres científicos de las especies que citamos, debido que se trata de publicaciones que se extienden en el mundo donde solamente se conocen las especies por sus nombres científicos, especies colocadas en los museos de Historia natural.

Y si nos ocupamos del vuelo planeado, es justo que nos sea permitido entretenernos en observar y estudiar el planeo de muchas aves y de todo lo que se relacione con este tema de actualidad.

Mas podría ser que en la aparente insignificancia de una comunicación, se pueda luego hallar en ella una importancia que fué menospreciada u olvidada, pero que debía entrar como un coeficiente en la solución.

Ahora bien, sobre algunas observaciones hechas a mi trabajo anterior del vuelo planeado, contestaré que débese aceptar como bueno todo estudio hecho sobre el planeo de una ave, cualquiera que sea.

El águila escudada o gavilán o halcón, cuyo nombre científico es *Geranoaetus melanoleucus*, como los otros falcónidos, tiene sus momentos de planeo, que aletea o que precipita; es decir, que la formación de sus alas y de todo su cuerpo se presta a estos diferentes medios de locomoción aérea.

No solamente los falcónidos nos enseñan algo de lo que ignoramos, sino que todas las aves de potente vuelo tienen sus momentos de hermoso planeo; hasta los insectos, libélulas y unas pocas mariposas (pieridas e nymphalidas) nos muestran, aunque raramente, que también pueden planear.

Yo, en mi calidad de ornitólogo, me permito decir que conozco y

que he estudiado el planeo de muchísimas aves de la Argentina, y que si los falcónidos nos pueden demostrar su mejor planeo digno de estudiarse es cuando ellos van a encontrar la llegada del acridio, pues, ávidos de alimentarse con el, los veremos en número crecido surcar el aire en todas direcciones sin preocuparse de explorar o de efectuar la espiral tan común en los aguilinos, y del cual hablé en el año 1910 y publicado en agosto de 1911 en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*.

Cuando el falcónido se alimenta en el aire cazando el acridio, solamente planea sin buscar de elevarse, pero sí de mantenerse a la altura del ortóptero en vuelo, devorando cada presa sin aletear y sin bajar.

Pero, poder observar los falcónidos en cazar acridios, como ver el planeo del cypselido, pieridas, libélulas o nymphalidas es demasiado accidental: así, como observar el águila escudada *Geranoaetus m...* tan poco común como las procellaridas.

Entonces vamos a lo más seguro: Nuestro Cathartes aura está siempre a disposición del observador, ubicado en las faldas tranquilas de nuestras montañas, ave que está formada a proposito para el planeo. No hay otro de mejor proporción, sea en la superficie alaria, sea en su brazo de palanca y de la posición de las alas en el planeo.

El *Cathartes aura*, el vulgo lo llama Choya, Cuervo, Fraile, y, en fin, es inútil citar los nombres vulgares que le dan; se sabe que es el cuervo de cabeza blanca, fácilmente reconocible aun durante el vuelo, pero hay que conocerlo y separarlo. No debe haber confusión o incertidumbre, pues de equivocarse en la especie caería mi aserción.

Esta importante ave, quizá única en el mundo, se traslada a cualquier altura sin necesidad de la espiral aguilina, y domina el aire de una manera encantadora. Decir que el Cathartes aura no pueda efectuar la espiral de elevación o que no pueda aletear sería mentir, pues él todo lo puede; pero la espiral y el aleteo es en él muy raro. Asi le vemos aletear cuando tiene que salir de una hoyada o de un bosque o en los días de máxima humedad del aire y volando a baja cota: entonces notaremos que el aleteo no es su vuelo.

Justamente debemos tener presente que los días de excesiva humedad todas las aves planean con cierta dificultad, se ve claramente que la córnea de todas las plumas en tales días pierde su tensión o sea su capacidad elástica. Entre tanto, en los días serenos y de aire seco vemos a las aves que planean por deleite, demostrándonos con sus juegos que el planeo les es fácil y de placer.

Unos cuantos *Phoenicopterus chilensis*, vulgarmente llamados parrina o flamenco o pato rosado etc...., que volaban a la superficie de un río, pudieron ser enfocados con un taquímetro y mantenidos en el campo del objetivo por un tiempo suficiente de poder obtener los datos que a continuación se van a dar. Aun sin la observacion hecha con un instrumento, se debe comprender cuáles serán los movimientos del cuerpo en el vuelo aleteado, pues la función de las alas en presión de bajada y una contrapresión de subida, tienen que dar un movimiento oscilatorio al cuerpo, movimiento que a simple vista no se percibe mientras en un instrumento es sumamente manifiesto.

El vuelo aleteado de dichos *Phoenicopteros* se presenta aproximadamente como el dibujo indica.

a) Posición alta del cuerpo, relacionada con la horizontal recorrida a terminación de la presión alaria, que es cuando el ala llega a su límite de bajada ;



Fig. 1. — Oscilaciones del ave en vuelo aleteado, recorriendo la linea punteada

b) Posición del cuerpo al terminar la alzada del ala. Esta alzada se produce con el ala semicerrada, de tal suerte que la contrapresión, o sea la presión negativa, es altamente reducida, pues, a más de la reducción del plano alario, su forma es convexna que corresponde a la curvatura del mástil de las remiges. Entonces las oscilaciones del cuerpo se producen de acuerdo a la rápida bajada al levantar las alas y lentamente la subida durante toda la presión positiva del plano alario, y que, según mi observación, se produce en distancia horizontal con una razón de 1 : 3, variable por cierto según la mole del ave y su amplitud alaria, la que en términos usuales diremos, en espacio longitudinal : una unidad entre el terminar y volver a principiar la presión ; tres unidades de distancia corresponden a la presión de deslizar, la que determina la posición oscilatoria del cuerpo, como queda demostrado en la figura 1 y sus referencias.

Mirando la nombrada ave cuando se presenta verticalmente sobre nosotros aleteando, notaremos un movimiento de remeo, y es que el ala se semicierra al terminar la presión, manteniéndose así hasta llegar a la nueva presión después de haberse elevado, tomando rápi-

damente su posición de completa envergadura al principiar la presión, como indica el dibujo de la figura 2.

Ahora bien, ¿Cómo debemos interpretar este movimiento? ¿Esta especie de remeo es voluntaria o no?

Si nosotros desarticulamos una ala del Phoenicoptero, o de otra ave con miembro alario de ancha envergadura, y aferramos este miembro por el brazo haciendo un movimiento de aleteo normal, o sea de planada, veremos que bajando el ala se abrirá completamente tomando una forma de máxima extensión, a pesar de una tensión natural que guarda siempre el miembro cerrado. Quiere decir, que con dar un movimiento de aleteo, a pesar de estar cerrado, las barbas al contacto de la presión del viento se deslizan hacia adelante con bastante violencia, y al llegar a su limite de mayor envergadura notamos un marcado golpe dado

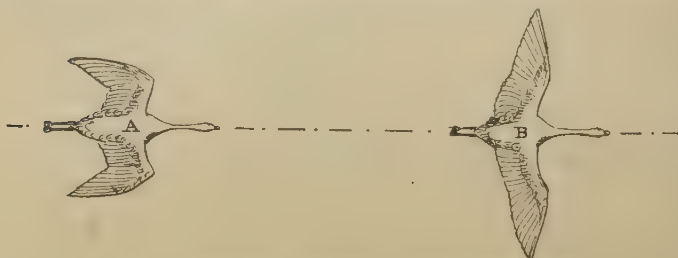


Fig. 2. — Aleteo del *Phoenicoptero chilensis*, visto de arriba

en la articulación cúbito-carpal, golpe que el ave evita, como se describe más adelante.

Ante todo sabemos que el aleteo es voluntario, pero no el remeo. El ave tiene una tensión voluntaria continua en su miembro alario, inalterada y de semicierre, mientras la apertura máxima viene de si sola al principiar la presión, pues las grandes remiges toman por primeras las formas de deslizamiento precipitando adelante, y que al llegar a la resistencia de la articulación cúbito-carpal dejaría un esfuerzo violento si no influyera una tensión muscular constante que el ave ejerce en todo su movimiento alario; y es esta tensión la que lleva el cuerpo adelante con la tracción alaria en deslizamiento y con una regularidad manifiesta de acuerdo al aleteo, sin golpes pero con suavidad.

En este movimiento de aleteo, las remiges al llegar a su limite de bajada y a su límite de alzada deben soportar una pausa, aunque invisible, pero suficientemente importante para darle un valor y que tiene que estar en contra del efecto deslizante. Entonces, para que se

produzca una traslación rápida del ave hacia adelante, una presión más enérgica en el plano alario, debe necesariamente determinar una curva más pronunciada en las remiges, comparada con la del deslizamiento planeado continuo, como lo hemos visto en ciertas fotografías de aves que planean y que aletean (ver Gaviotas, N. C., Laridos varios).

Pero en todos los vuelos de aves, sea aleteado o planeado, hallamos que el deslizamiento se produce bajo un plano curvo alario más o menos pronunciado según sea aleteado o planeado. Venimos a la conclusión que : el vuelo efectuado en los dos sistemas es producido por una misma causa, entonces el planeo es igual al aleteo, con la sola diferencia de continuo o de alternado, o sea ninguna diferencia sustancial en su natnraleza. Podemos también decir que el deslizamiento aéreo es dado por la presión elástica del flúido contra una superficie de curva parabólica también elástica.

Esta es mi conclusión comparativa entre el planeo y el aleteo.

VECTORES DE DESLIZAMIENTO

En el aleteo de los Hirundos (vulg. Golondrinas) se nota que al cierre del ala, la curva dada por la presión del aire es sumamente pronunciada, la que a simple vista se la nota. A esta curva, arbitrariamente dibujada, voy a aplicar vectores también arbitrarios para explicar mi manera de comprender el deslizamiento hacia adelante.

Al cortar el aire con la parte delantera del ala éste no puede producir una presión normal en seguida del borde, sino después de una cierta distancia; y esta presión es siempre más normal y utilizable a medida que se aproxima al término de su función o sea del plano alario.

En efecto, veremos (como ya lo he dicho) que el planeo de las aves es siempre mejor efectuado cuando la especie tiene más envergadura, y no más superficie alaria. El aire más y mejor utilizado es lo que más se aleja del cuerpo que rompió el flúido, que es también el más tranquilo; y es, por eso, justo que dejemos una faja neutra, sino negativa, al iniciarse la partición del aire.

Consultamos el resultado de los vectores; en ellos notamos que la presión por el sostén del cuerpo en deslizamiento es diez veces superior al del empuje de traslación. A pesar de tan pequeño coeficiente vemos que el deslizamiento se produce en forma vertiginosa.

No pensamos que el aparente remeo de los hirundos y de todas las aves sea un remeo en pleno como el de las paletas usadas en un bote.

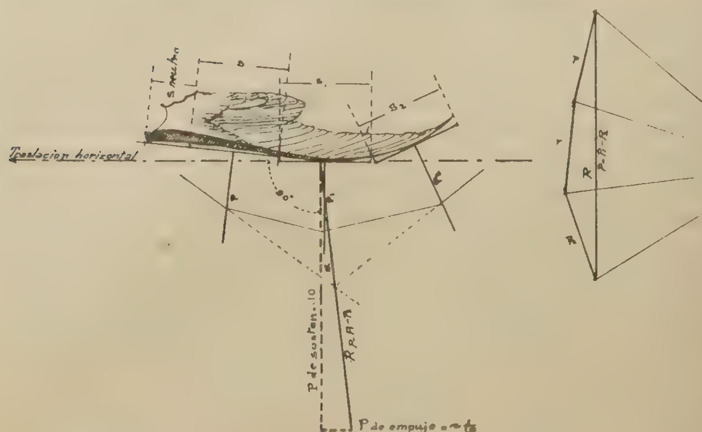


Fig. 3. — Sección de una ala : croquis arbitrario de la función de la presión de deslizamiento basado en que, en espacios iguales, igual presión en menor resistencia da mayor curvatura

El ala del ave, o sea su plano en presión, está siempre normal al cuerpo como en el planeo, pues la construcción del miembro tiene una articulación que se opone hasta con rigidez a la torsión. Lo que vemos es simplemente la curvatura del plano alario mayor en el extremo pos-

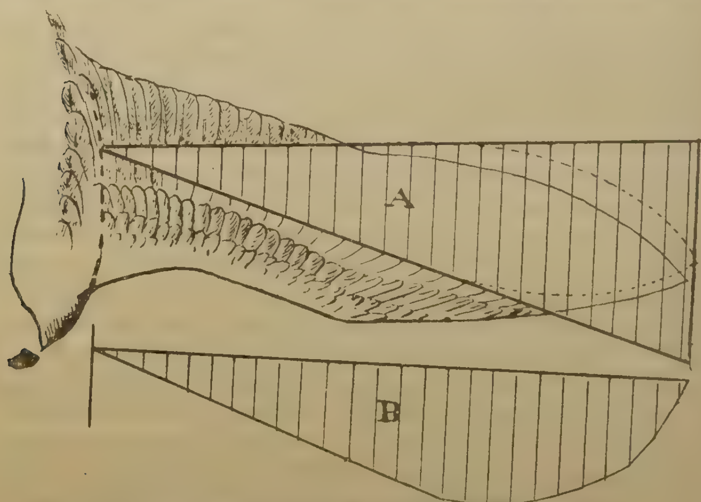


Fig. 4. — A, gráfico de las magnitudes de presion por unidad de s.
B, gráfico de las magnitudes de presion de deslizamiento

terior y en posición oblicua cuando el ala llega a su límite de bajada. La curvatura de presion, en todo caso, es potente en el planeo de sostén y pequeña en la parte que corresponde al empuje de traslación como demuestro gráficamente.

Y para comunicar con más precisión cómo considero la presión utilizada en el planeo alario cualquiera que sea el sistema de vuelo. dibujo sobre una ala, dos planos, uno vertical y otro horizontal, expresión gráfica aproximada de la función del flúido contra la superficie alaria.

En los dos casos, el polígono de las presiones está relacionados con la potencia utilizada u obtenida, y no con la superficie alaria que concurre en el deslizamiento, pues deseo demostrar lo antedicho o sea que la mayor presión del viento en una unidad alaria es siempre mayor a medida que se aleja del cuerpo del ave, como dejo demostrado en la figura 4.

OBSERVACIONES

Un día de tempestad en alta mar he contemplado con placer las aves de la procella que, colocándose a estribor del barco, posición protejida del viento, nos seguían con facilidad, pues el piróscafo adelantaba lentamente debido al fuerte oleaje que continuamente dejaba al descubierto la hélice. Estas aves se mantenían a distancia del agua más o menos entre uno y dos metros, distancia que conservaban en continuo planeo obligado por el fuerte viento. Las ondulaciones de bajada y de subida de las olas eran secundadas por los procellaridos sin el menor esfuerzo y sin un solo aleteo. No alteraban su distancia del agua, sea en la cúspide de la ola, sea en la concavidad más profunda, como si en vez de estar apoyadas en el aire lo fuera sobre un cuerpo flotante. El planeo del ave quedaba en todo caso normal al oleaje, quiero decir, que el eje transversal del ave como el longitudinal siempre quedaba paralelo a la tangente del agua en, la que sobrestaba cualquiera que fuera la forma superficial de la ola y raramente normal a la horizontal absoluta de la superficie marina en calma ¿como busco de demostrar en la figura 5

Este fenómeno viene a demostrar que el ave se desliza sobre el estrato aéreo, y que estos estratos no se alteran entre sí a pesar del empuje del elemento de agua perturbado en elevado oleaje, pero lo secundan sin descomponer su coesión y sus distancias. (La palabra estrato se introduce para explicar el fenómeno.)

Así el ave, sin ejercer un esfuerzo voluntario, es llevada por el estrato aéreo en que se desliza y manteniéndose en las posiciones que el mismo estrato le impone.

El paralelismo de las curvas de los estratos, muy de acuerdo a la

Fig. 5. — La curva inferior corresponde a aleaje, y las superiores a estratos aéreos

superficie del oleaje en su contacto, viene eliminnádose a medida que se aleja de las olas, hasta anularse a una distancia de unos cuantos metros y que no deben superar a 20. Las aves observadas no me demostraron el limite, pues no fué posible, ni permitieron, seguir la observación.

PROVE ASTRONOMICHE

CONTRARIE ALLA « TEORIA DELLA RELATIVITÀ »

I FENOMENI DELLE « STELLE VARIABILI » SPIEGATI COME EFFETTO BALISTICO DELLA PROPAGAZIONE DELLA LUCE

Por M. LA ROSA

I

Il Congresso internazionale di Filosofia, tenuto a Napoli nel maggio dello scorso anno, prometteva di riuscire di molto interesse per il posto speciale che era stato fatto alla « teoria della relatività ». Il mancato intervento del grande fisico-matematico tedesco tolse a quel Convegno l'occasione di prendere in esame e di discutere una obiezione che vi fu portata.

Quest'obiezione riguarda un punto essenzialissmo della nuova teoria: il solo in cui essa è costretta a soggiacere al controllo dell'esperienza.

La grande importanza del soggetto giustifica il desiderio dell'autore di questo scritto di far conoscere al mondo colto la sua obiezione, e gli *argomenti di fatto* su cui essa riposa, nell'alto interesse della ricerca del « vero », che è fine ultimo del lavoro scientifico.

Non dispiacerà al lettore di dare una scorsa alle seguenti brevi notizie di indole storica, indispensabili per la comprensione dell'indole e della portata dell'obiezione; illustreremo nella seconda parte di questo scritto il contenuto della nostra obiezione e ne esamineremo le basi fisiche-astronomiche.

La scoperta degli elettroni, fatta negli ultimi anni del secolo scorso, rese necessaria una vasta opera di revisione di tutto il patrimonio

scientifico dalla Fisica acquisito. La parte più gravosa, quella di rielaborare la teoria dei fenomeni ottici ed elettromagnetici già sviluppata da Maxwell e da Hertz, fu assolta con grande successo da Lorentz: la nuova teoria ebbe il merito di abbracciare un campo di fatti più ampio, e di spingere più in fondo lo sguardo, nei misteriosi rapporti fra materia ed etere.

Questa teoria de Lorentz ammetteva la completa immobilità dell'etere, e la sua perfetta indipendenza dai movimenti della materia.

Una tale ipotesi affermava implicitamente la possibilità di scoprire e di misurare il movimento dei corpi rispetto all'*etere,* ossia il moto *totale*, o *assoluto* dei corpi. In particolare, lo studio di opportuni fenomeni *aventi sede nell'etere,* avrebbe dovuto permetterci la misura del moto assoluto della Terra nello spazio. Sarebbe bastato, a questo fine, il confronto della velocità dei raggi luminosi viaggianti lungo la direzione della traslazione terrestre, con quella dei raggi viaggianti lungo una direzione perpendicolare; perchè le onde luminose, avendo la sede nell'etere, avrebbero dovuto presentare nelle due direzioni velocità diverse all'osservatore terrestre, per effetto del moto di traslazione.

Da qui ebbero origine numerosi tentativi sperimentali diretti a scoprire il moto della Terra rispetto all'etere, fra i quali va ricordata, in prima linea, la famosa esperienza di Michelson e Morley. Ma questi tentativi diedero, ed hanno dato tutti, esito nettamente negativo, determinando un vero conflitto fra teoria ed esperienza!

Non mette conto di ricordare le ipotesi speciose che furono avanzate per cercare di rimuovere questo conflitto: basta dire che fallirono all'intento, perchè lasciavano aperta la via a nuovi esperimenti del genere, il cui esito riusciva sempre negativo.

È merito grande di Einstein di avere compreso, per la prima volta, il significato profondo di queste *esperienze negative*, e di avere intuito la nuova e grande legge di natura che ese rivelavano; *l'impossibilità di svelare e di misurare per mezzo de qualsiasi fatto fisico il moto della materia rispetto all'etere : ossia il moto totale o assoluto dei corpi.*

Proposizione importantissima questa, la quale veniva ad estendere a tutti i fenomeni fisici una propietà ben nota nel mondo della Meccanica classica: la relatività dei fenomeni, ossia la loro independenza dallo stato di moto (rettilineo e uniforme) di tutta la sede spaziale in cui i fenomeni stessi si svolgono.

Secondo questa giusta veduta di Einstein, la ragione profonda del dissidio stava in una vera antitesi fra il *principio di relatività* e la teo-

ria de Lorentz; sicchè la conciliazione poteva raggiungersi a un solo patto: rendendo «relativista» tutta la Fisica, così come lo era la Meccanica.

Su questo punto nessun dubbio, nessun disparere può dividere Scuola da Scuola, studioso da studioso. Finchè nuove esperienze (1) non verranno a persuaderci del contrario, tutte le construzioni scientifiche debbono *esplicitamente* soddisfare a questa legge di «relatività» vista nettamente da Einstein.

Ma con ciò restiamo ancora molto lontani dall'affermare che la scienza debba proprio adagiarsi sullo schema teorico tratteggiato da Einstein, siamo molto lontani dal dover accettare la «teoria della relatività», come una teoria universale dei fenomeni *fisici*. Su questo punto è bene intendersi chiarissimamente.

L'esperienza ha imposto, ed Einstein ha riconosciuto, la necessità dell'accordo fra il principio di relatività della Meccanica e la teoria generale dei fenomeni fisici; ma quest'accordo può essere raggiunto per infinite vie, in infiniti modi, con infinite costruzioni teoriche nuove, le quali tutte saranno «relativiste» se quest'accordo riesciranno a realizzare. Questo debbono tenere ben presente tutti coloro che amano farsi un'opinione chiara sui dibattiti della nostra scienza e che non possono procurarsi se non informazioni indirette; questo sappiano tutti coloro che attraverso la pura speculazione giungono alla conclusione «relativistica», prima di legare il loro pensiero al carro trionfale della «teoria della relatività», tracciata de Einstein.

Ed infatti sul terreno strettamente scientifico, subito dopo Einstein, un altro giovane teorico, Walter Ritz, schizzò una «teoria generale dei fenomeni fisici» in piena armonia col «principio di relatività», cioè «relativista», ma in perfetta antitesi con la teoria de Einstein.

Ecco brevemente in che consiste l'antitesi:

Einstein riguarda le equazioni fondamentali della teoria de Lorentz come conquista definitiva ed intangibile della scienza, e cerca di rimuovere il conflitto piegando ed adattando il principio di relatività in modo da portarlo sotto l'impero della teoria di Lorentz. Ma piegare il principio di relatività significa piagare, deformare la vecchia e glo-

(1) Recentemente l'esperienza di Michelson è stata ripetuta all'Osservatorio di Monte Wilson (California) e — si dice — con esito positivo, benchè di importo assai più piccolo di quello previsto dalla teoria. Ma le notizie ora conosciute non permettono un giudizio conclusivo in proposito.

riosa Meccanica classica — checchè si voglia dire in contrario, invocandone la validità rimasta intatta per i moti lenti — significa rinnegarne, abbatterne i postulati fondamentali e quei concetti primitivi di tempo e di spazio, che tanto hanno dato da pensare e da scrivere.

Questo rivolgimento acaturisce in modo necessario da un'affermazione di Einstein, in apparenza lecita e creduta conforme all'esperienza, dal postulato della « costanza della velocità di propagazione della luce », che è la *vera* base di tutta la costruzione teorica.

Questo postulato afferma, che la *luce* che ci viene da una stella, o da una sorgente qualunque, *viaggi sempre con la stessa velocità, qualunque possano essere le condizioni di movimento* (o più esattamente la velocità) *della sorgente stessa, e dell'osservatore.*

Ritz, al contrario, cerca di tenere intatta la Meccanica classica, e si propone di ritoccare e di adattare la teoria elettromagnetica in modo da condurla sotto il dominio del principio di relatività. Egli raggiunge un tal fine pure per mezzo di un postulato sulla velocità della luce, il quale è perfettamente contradittorio con quello di Einstein; perchè suppone che la luce che ci giunge da una sorgente in moto (rispetto a noi), viaggi con una velocità uguale alla somma *(vectoriale)* della velocità normale c della luce (emessa da una sorgente in quiete) e della velocità v della sorgente.

L'uno e l'altro schema hanno indubbiamente pregi e difetti, vantaggi ed inconvenienti, vedute sintetiche geniali ed oscure lacune: sicchè la scelta fra i due richiederebbe un'analisi diligente delicata e non facile.

Ma prima ancora che si possa venire all'esame di questi due schemi particolari occorre che sia assolto un campito più generale e di carattere « pregiudiziale »; quello di saggiare la bontà e la sicurezza delle due grandi vie intraviste dai due geniali teorici, per orientare in modo sicuro la ricerca, per indirizzarla precisamente o sulla via tentata da Einstein: conservazione intatta dell'elettrodinamica e revisione della Meccanica attraverso *il postulato della costanza della velocità della luce;* oppure su quella indicata de Ritz: conservazione della Meccanica e revisione dell'elettrodinamica attraverso *il postulato della « composizione » della velocità della luce.*

Dopo che questo primo passo sarà fatto sotto la guida della *esperienza, la sola che abbia diritto di decidere la scelta,* il lavoro dei tèorici potrà procedere sicuro nell'elaborazione dello schema che ci occorre; e si potrà riprendere ed adattare l'uno e l'altro dei due già

costruiti, o piuttosto escogitarne *ex novo* uno o più altri, neglio rispondenti.

Pertanto fu presto avvertita la necessità della ricerca di un « fatto fisico », capace di fornirci l'elemento *decisivo* di prova, in favore dell'una o dell'altra, ipotesi sulla velocità di propagazione della loce.

Ora il *solo* campo di fatti da cui la ricerca poteva e può attingere questo elemento di prova era ed è quello dei fatti astronomici, per ragioni su cui qui non occorre fermarsi; e fin dal 1913 De Sitter, un astronomo olandese, credette di averlo trovato, in base a certe osservazioni sulle « stelle doppie » (1).

Le conclusioni di De Sitter furono precisamente contrarie al postulato della velocità della luce con quella della sorgente — e da allora in poi il moto delle « doppie » è stato addotto come la più forte prova in favore del postulato fondamentale di Einstein.

Un'analisi facile mi ha condotto, da recente, a riconoscere che l'argomentazione di De Sitter nascondeva un errore; e riprendendo in esame le conseguenze a cui l'ipotesi di Ritz può condurci quando venga applicata alle osservazioni del movimento delle « doppie » sono riuscito a *prevedere per mio conto tutto un campo importantissimo di fatti che trovano un magnifico riscontro nella realtà ;* fatti che pur essendo noti da molto tempo erano nella maggior parte — dopo secoli — ancora rimasti oscuri ed inspiegati.

Questo imprevisto e felicissimo accordo fra la previsione teorica (fatta all'infuori di ogni pericolosa suggestione, perchè i fatti, mi erano ignoti) e le osservazioni, costituisce un tale elemento di prova che supera di gran lunga il valore di qualsiasi esperienza *ad hoc* istituita, di qualsiasi sistema di osservazioni affannosamente, e non sempre spassionatamente accumulate, per verificare effetti, che spesso sono illusori, perchè al limite della quantità osservabili.

Ma esporrò le linee fondamentali della mia analisi, nella seconda parte di questo scritto.

(1) Sono queste, coppie di stelle, vicini fra loro e vincolate da reciproca attrazione, in virtù della quale girano l'una attorno l'altra, secondo leggi analoghe a quelle scoperte da Keplero per il moto dei pianeti attorno al Sole.

II

Il compito che dobbiamo svolgere in queste pagine è duplice.

Prima di tutto dobbiamo provare che le prove invocate da De Sitter, contro l'ipotesi della composizione della velocità della luce, con quella della sorgente non sono decisive.

Dopo dobbiamo mostrare che le conseguenze a cui quest'ipotesi ci spinge sono pienamente confermate dai fatti ; anzi che questi fatti, i quali per tal via trovano per la prima volta una spiegazione generale e soddisfacente, formano una sicura base per l'affermazione di quell'ipotesi.

Ammetteremo, a titolo provvisorio, come esatta l'ipotesi balistica : ammetteremo, cioè, che la velocità di propagazione della luce, quando essa ci giunge da una sorgente in *moto* (per esempio una stella) è quella che si ottiene sommando alla velocità normale di propagazione c (quella della luce emessa da una sorgente in quiete) la velocità u con cui la sorgente si muove lungo la linea di mira (1).

Immaginiamo allora di rivolgere lo aguardo verso una « doppia », costituita da un grosso astro centrale O, presso a poco immobile, e da un « compagno » S, che gli giri intorno, nel verso della freccia, lungo un'orbita circolare, posta in un piano che contiene la « visuale » MO.

Signiamoci in figura i punti C, D, A, B, in cui la visuale stessa ed il diametro ad essa perpendicolare tagliano il circolo, ossia le quattro posizioni fondamentali che gli astronomi chiamano *congiunzione* (C), *opposizione* (D), *quadrature* (A, B).

Quando la stella passa per A la sua velocità v è diretta lungo la visuale, ma in senso opposto rispetto ai raggi che partono in quel momento S, i quali, perciò, viaggiano con la velocità $c - v$.

Quando la stella passa per D, la sua velocità v è diretta perpendicolarmente alla visuale, e non ha influenza sulla propagazione dei raggi che vanno verso l'osservatore, i quali perciò viaggiano con la velocità normale c.

Quando la stella passa per B, la v è diretta secondo la visuale e

(1) Se la sorgente si muove con la velocità v in una direzione qualunque, la u è una certa parte di v o come si dice la « componente » di v lungo la linea di mira.

nel verso della propagazione, perciò i raggi viaggiano con la velocità $c + v$.

Considerazioni analogue si possono ripetere per i raggi emessi nelle successive posizioni comprese fra B ed A; essi dovranno viaggiare con velocità *decrescenti* da $c + v$ a $c - v$.

Per chiarire bene i fenomeni che dobbiamo aspettarci, per il fatto di questa propagazione di luce con «velocità variabile», ci avvarremo di un esempio concreto.

Lungo un fronte di battaglia, il comandante in capo — posto a notevole distanza — dirama ordini ed informazioni, per mezzo di corrieri spediti ad intervalli costanti di tempo, per esempio, a ogni ora. Se i corrieri viaggiassero tutti con la stessa *velocità*, i reparti combattenti riceverebbero gli ordini, dopo tempi più o meno lunghi, a seconda della loro distanza dal Comando, ma ad intervalli costanti di un'ora ciascuno. Se invece quelli corrono con velocità variabili, gli ordini giungeranno ai successivi reparti ad intervalli differenti.

Figura 1

Fermiamoci per un momento a considerare il viaggio di due corrieri consecutivi; supposto per esempio che il primo, spedito all'ora 0, viaggi con la velocità di 10 kilometri all'ora, mentre il secondo, spedito all'ora 1, viaggi con la velocità di 11 kilometri all'ora.

È evidente che il vantaggio di 10 kilometri che il primo possiede al momento di partenza del secondo, diventerà sempre più piccolo a misura che la lunghezza (o più esattamente la durata) del percorso va crescendo. Infatti alle ore 2, il primo corriere avrà percorso 20 kilometri méntre il secondo ne avrà percorso 11, sicchè la loro distanza sarà diventata de 9 kilometri; alle ore 3 sarà diventata di 8; e così via. Alle ore 11 il secondo corriere, che avrà percorso 110 kilometri, raggiungerà il primo che ne avrà pure percorso 110, e da quel mo-

mento in poi il secondo precederà il primo di un tempo tanto più grande quanto maggiore sarà l'ulteriore distanza percorsa.

Pensando dunque a tutti i corrieri partiti per esempio in un'intera giornata (24 ore) e supponendo che le loro velocità siano tutte diverse, prima crescenti e poi decrescenti, riusciamo a intuire quale grosso groviglio di ordini e di idee *potrà* nascere sul nostro frente di battaglia, supposto che i successivi bollettini non portino indicazione alcuna dell'ora di partenza, a qualsiasi altro elemento che valga ad illuminare coloro che li ricevono sul « vero » ordine della loro successione.

Appunto *questi temibili «accavallamenti» fra raggi partiti dalla stella mobile, da posizioni ed in momenti diversi,* sono stati l'arma con cui De Sitter combatte l'ipotesi di Ritz. *Tali accavallamenti non potrebbero permetterci* — osserva De Sitter — *di seguire fedelmente il moto dell'astro girevole e di scoprirne le leggi, contrariamente a quanto risulta dalle osservazioni sulle « doppie », le quali ci hanno permesso di studiarne il moto e di stabilirne le leggi.*

Ora questa conclusione di De Sitter è troppo poco meditata ed è *generalmente inesatta.*

Prima di giungere alla condanna dell'ipotesi di Ritz, bisognava cercare di dipanare il « groviglio », di stabilire i fattori da cui dipende, e persuadersi bene del giuoco che ciascuno di essi può avere in questo o in quest'altro caso.

Ognuno vede subito, che se le differenze di velocità fra i successivi corrieri fossero solamente di qualche metro sui 10 km ora, supposti come media, nulla più avremmo da temere per parte delle piccole alterazioni degl'intervalli di arrivo. Esse sarebbero affatto incapaci di produrre spostamenti nella successione degli ordini del nostro comando, quando — beninteso — i tempi totali di percorso non siano troppo grandi.

Orbene, le differenze di velocità che possiamo aspettarci fra i raggi luminosi, emessi da una stella mobile, sono sempre frazioni assai piccole della velocità media di propagazione della luce. Stando a quanto si conosce intorno alla velocità dei corpi celesti, queste differenze risultano comprese fra qualche centomillesimo ed il mezzomillesimo della velocità della luce.

Dunque per quelle stelle per le quali il tempo impiegato dai raggi per giungere a noi non sia troppo grande, cioè per quelle stelle che non sono dai noi molto distanti, nessuna perturbazione notevole potremo temere dall'accavallamento dei raggi.

Ora sta in fatto che le osservazioni astronomiche che ci hanno fat-

to conoscere le leggi di movimento delle « doppie » si riferiscono proprio a stelle abbastanze vicine, perle quali gli accavallamento supposti, appositamente calcolata, danno luogo a effetti trascurabili: possiamo quindi concludere — contrariamente a De Sitter — che queste osservazioni nulla provano contro l'ipotesi di Ritz.

Le cose cambiano profondamente quando prendiamo a considerare stelle lontane per il tempo θ, che ir aggi impiegano per giungere a noi, sia molto grande. Precisamente vogliamo considerare il caso in cui il rapporto fra il tempo τ_0 di una rotazione del « compagno », ed il tempo θ sia dell'ordini stesso di grandeza del rapporto $\frac{v}{c}$.

Per far comprender bene le cose conviene esaminare da vicino un esempio concreto. Il compagno mobili impieghi, per esempio 100 giorni a compiere il suo giro attorno l'astro centrale, e la sua velocità v sia di 30 kilometri al secondo (quella con cui la Terra si muove lungo l'orbita), in modo che il rapporto $\frac{v}{c}$ ($c = 300.000$ km/sec.) risulti uguale a 1/10.000. La distanza di tale « doppia » dalla Terra sia 138 anni luce, cioè 500.000 giorni, in modo che il rapporto tra il tempo di rotazione 100 giorni ed il tempo medio impiegato dalla luce nel viaggio sia 1/5000, cioè doppio di $\frac{v}{c}$.

I raggi partiti dalla posizione A (fig. 1) al momento iniziale, viaggiano allora con la velocità $c - \frac{c}{10.000}$; quelli partiti da B con la velocità $c + \frac{c}{10.000}$, la quale supera di $\frac{2c}{10.000}$ la velocità dei primi, cosicchè, lungo un percorso qualunque, i raggi partiti da B con 50 giorni di ritardo guadagnano 2/10.000 del tempo impiegato, cioè 2 giorni su ogni 10.000 giorni di percorso; e perciò 100 sul nostro percorso totale, che è di 50 volte 10.000 giorni. In conseguenza i raggi partiti da B giungeranno a noi ben 50 giorni prima dell'arrivo di quelli partiti da A; ed è chiaro che giungeranno sovrapposti con altri raggi, partiti da certe posizioni intermedie, fra A e B, e perciò viaggianti con velocità intermedie.

Per acquistare un'idea ben chiara degli effetti di questi accavallamenti, è indispensabile stabilire, in modo preciso, la legge di corrispondenza fra i tempi di partenza dei raggi luminosi dalla stella, che indicheremo con t, e i tempi di arrivo al nostro occhio, che indicheremo con T.

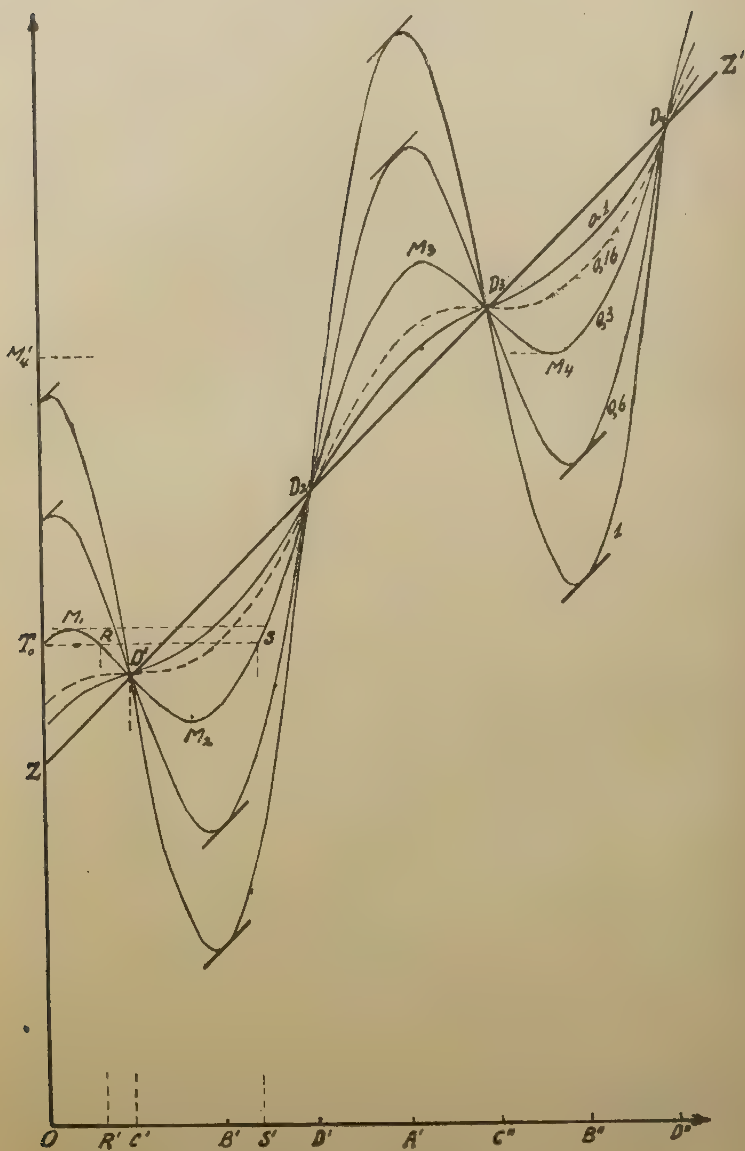


Figura 2

Per evitare di impelagarci in una discussione di carattere matematico (per quanto semplice ed elementare) riferiamoci all'unito diagramma (fig. 2) che dà la rappresentazione grafica di tale legge in certi casi particolari notevoli.

Sulla retta OX sono rappresentati i tempi di partenza, in modo che al punto O corrisponda l'istante iniziale ($t = o$) in cui la stella ruotante S passa per la posizione A (fig. 1); al punto A′ corrisponda il tempo che la stella impiega a fare il giro completo; ai punti C′, B′, D′ che dividono OA′ in quattro parti uguali, corrispondono rispettivamente i momenti in cui la stella passa per le posizioni C (opposizione), B (2ª quadratura), D (congiunzione); ai punti A′, C″, B″, D″ i momenti dei nuovi passaggi (2° giro) per le stesse posizioni A, B, C, D; e così di seguito.

In modo affatto analogo i punti della retto OY rappresentano i tempi di arrivo T (1).

Nell'ipotesi di Einstein, in cui i raggi partiti da una posizione qualunque viaggiassero sempre con la *stessa* velocità, i tempi di arrivo crescerebbero regolarmente, al crescere di quelli di partenza, e verrebbero nel nostro disegno rappresentati dai punti della retta ZZ′ egualmente inclinata rispetto ad OX ed OY. Nell'ipotesi balistica, invece, a causa dei cambiamenti di velocità i tempi di arrivo subiscono delle vere fluttuazioni, ed al posto della retta ZZ′ avremo, nel disegno, una curva ondulata, che si scosta sempre più dalla retta stessa, a misura che il rapporto $\frac{\tau_0}{\theta}$ si avvicina al rapporto $\frac{c}{v}$, lo uguaglia, o lo supera.

Le curve designate fanno vedere ciò molto chiaramente: esse corrispondono ordinatamente ai casi in cui il primo rapporto è 0,1 del secondo; ovvero 0,16; 0,3; 0,6; 1 (cioè uguale).

Per vedere bene gli effetti dell'accavallamento analizziamo nei particolari una delle nostre curve; scegliamo per esempio quella per cui il rapporto $\frac{\tau_0}{\theta}$ è 0,3 del secondo.

Il fenomeno va considerato dal momento in cui arrivano i raggi partiti dalla stella all'epoca della 1ª quadratura (cioè al passaggio per A), ossia partiti al tempo $t = o$.

(1) In realtà per le esigenze del disegno, i valori di T sono tutti diminuiti di un numero fisso; ciò che non altera per nulla la *forma* della curva disegnata, dalla quale *soltanto* dipendono le conseguenze che verranno esaminate.

Questo momento ci è rafigurato dal punto T_0 della nostra curva. Conducendo da T_0 una retta parallela all'asse OX osserviamo che essa taglia alteriormente la curva nei punti R ed S. Ciò significa che i raggi partiti dalla stella negli istanti $t_1 = OR'$; $t_2 = oS'$, arrivano a noi *pure al tempo* T_0, cioè arrivano insieme con quelli partiti al tempo $t = o$. In altre parole ci giungono « accavallati » i raggi emessi da *tre* posizioni diverse: dalla prima quadratura A, da una posizione appartenente al primo quarto di giro ($OR' = 1/6\ OA'$), e da una appartenente al terzo quarto. Significa ancora, che nel momento T_0 sono già arrivati i raggi partiti dalla posizioni che la stella prende in tutto l'intervallo che decorre dall'istante $t_1 = OR'$, all'istante $t_2 = OS'$, perchè, come la curva ci mostra, i tempi di arrivo T per i raggi partiti in detto intervallo sono tutti *più piccoli* di T_0.

La luce emessa dalla stella in così gran parte del giro, ha dovuto perciò sovrapporsi alla luce emessa nel giro precedente.

Nei tempi che succedono a T_0 (cioè più grandi di T_0) e per un breve intervallo raccoglieremo ancora luce proveniente da tre posizioni distinte — si consideri sempre la figura — di cui la 1ª e 2ª posizioni si vanno avvicinando fino a confondersi in un sol punto M_1. Allorchè T cresce ulteriormente, la nostra parallela ad OX taglia *una sola volta la curva,* ossia l'accavallamento scompare. E scompare finchè T non raggiunge il valore OM'_1, poichè da quel momento in poi i raggi emessi nell'ultima parte del giro si sovrappongono a quelli emessi in circa la metà del secondo (la parallela taglia nuovamente in tre punti la curva).

Ma oltre a questo fenomeno di accavallamento importa rilevare ancora il fatto importante che segue: in vicinanza dei punti M_1, M_2, M_3, ecc... l'osservatore deve ricevere una quantità di luce assai più grande di quella che avrebbe raccolto se la velocità di propagazione della luce fosse restata costante (o l'astro fermo), mentre nelle vicinanze dei qunti D_1, D_2, ecc., deve riceverne una quantità alquanto più piccola, per il gioco di un secondo « fattore di fluttuazione » dell'intensità luminosa, il quale è molto più importante dell'accavallamento già visto. Il diagramma ci servirà molto bene per chiarire la cosa.

In corrispondeza dei punti D_1, D_2, ..., la nostra curva, come ognuno vede, è molto erta rispetto all'esse OX: mentre in corrispondenza dei punti M_1, M_2, ... è assai poco inclinata (anzi piccoli archi presi nelle immediate vicinanze di questi punti sono addirittura paralleli a OX). Ciò stà ad indicare che in corrispondenza dei primi, la luce emessa dalla stella in un certo intervallo di tempo h giunge all'osservatore

in un intervallo di tempo k, alquanto maggiore; e ciò significa che la luce emessa nel primo tempo arriva in una durata alquanto maggiore, e perciò si *diluisce* — mi si permetta la parola — in un tempo alquanto più lungo, in modo che *per ogni unità di tempo ce ne arriva una quantità molto minore della normale.*

Negli altri momenti avviene l'opposto: la luce emessa in un certo intervallo h_1 viene ricevuta in uno k_1 alquanto più piccolo di h_1, sicchè *avremo forti concentramenti di luce.*

In totale, e per l'arrivo contemporaneo di raggi emessi da più posizioni, e *molto più per questi periodici* addensamenti e diradamenti di luce, dobbiamo aspettarci che la stella ci presenti cambiamenti periodici dell'intensità luminosa, cioè *cambiamenti periodici della grandezza apparente.*

Tutto ciò che abbiamo detto per il caso esaminato, regge ancora — con le opportune varianti — per gli altri casi in cui i due rapporti soliti siano poco diversi, sicchè siamo autorizzati a concludere che *tutte le stelle doppie (o più complesse) per le quali la distanza, la velocità ed il periodo siano tali da soddisfare alla condizione data* (cioè $\frac{\tau}{\theta}$ dello stesso ordini da grandezza de $\frac{r}{c}$) *debbono apparirci come « stelle variabili ».*

La nostra analisi ci conduce dunque a *prevedere* l'esistenza di « stelle variabili », e ci conduce anzi a prevedere in *modo completo* i particolari svariatissimi che nel loro comportamento possono apparire, al mutare del valore dei cennati rapporti.

Or bene, gli astronomi conoscono da tempo l'esistenza di « stelle variabili » (che era a me ignota fino al momento in cui sviluppai le considerazioni che ho qui schizzate); le prime osservazioni sono ansi assai vecchie, se fra le « variabili » comprendiamo — come è naturale di fare — le « stelle nuove », poichè di esse troviamo notizie in tempi anteriori alla nascita di Cristo. ¡ Ma l'Astronomia non era fin oggi riuscita a dare una spiegazione dei fenomeni misteriosi e complicati che queste stelle presentano!

Solo, in seguito alla scoperta della costituzione di « doppie », di alcune di queste stelle, si è attribuita la variabilità della loro luce ad un fenomeno di ecclisse. Ma questa spiegazione, che non è esente di difficoltà e di obiezioni, si adatta solo a poche delle tremila e più « variabili » oggi conosciute.

L'ipotesi balistica sullo velocità di propagazione della luce ci conduce, invece, nel modo più diretto, più semplice e più naturale a cos-

truire una spiegazione *generale* di questi fatti, la quale si *dimostra in perfetta armonia* con le osservazioni.

Non possiamo qui indugiare nell'esposizione dei fatti e nel confronto con le previsioni teoriche; debbiamo contentarci di indicare i seguenti punti salienti dell'accordo fra teoria ed osservazione:

1° Le *curve di luce* — cioè quelle che reppresentano la legge di variazione periodica della luce della stella — alle quali conducono immediatamente le considerazioni teoriche accennate, trovano perfetto riscontro nelle curve di luce tracciate in base alle osservazioni astronomiche sulle variabili per eclissi (tipo β Persei);

2° Le curve di luce si possono prevedere supponendo che l'orbita su cui gira il « compagno » sia ellisse invece che circolo, danno un'immagine fedele dei fenomeni presentati dalle « variabili » meno semplici (tipo η Aquilae e δ Cephei) alle quali non può adattarsi la « spiegazione dell'ecclissi »;

3° Le curve di luce che si possono prevedere supponendo che la stella abbia due compagni, spiegano i fenomeni misteriosi e complessi delle variabili del tipo Mira Ceti (1); le quali presentano periodo variabile e massimi e minimi di luce pure variabili;

4° Ammettendo che certe stelle, per effetto dell'attrazione di altre, riescano a nuoversi rispetto a queste, così come le comete si muovono rispetto al Sole (cioè secondo orbite paraboliche, o secondo gigantesche ellissi enormemente schiacciate), abbiamo potuto facilmente dare una spiegazione molto semplice dei fenomeni delle « nuove »: cioè di quelle misteriose stelle, che sorte quasi improvvisamente dall'oscurità degli abissi celesti, hanno brillato per alcuni mesi, o si sono oscurate poscia rapidamente, sino a scomparsa totale, o ridursi a una piccolezza, osservabile solo con i più potenti telescopi.

Vale la pena di gettare un'occhiata sulla curva della figura 3 in cui sono rappresentate le curve che danno la legge dei tempi di arrivo T in funzione de quelli di partenza *t* per due di questi casi.

Ciascuna curva risulta dapprima tangente alla solita retta ZZ', se ne stacca lentamente in modo da presentare un'inclinazione via via più piccola rispetto all'asse CX, diventa parallelo a quest'asse, per piegarsi infine molto lentamente in senso inverso.

La quantità di luce che ci deve giungere in ogni secondo, deve per-

(1) Dopo che per la *prima volta* era stata da me formulata la ipotesi della natura complessa delle variabili di questa specie, è stata fatta la scoperta di un « primo » « compagno » di Mira Ceti.

ciò a tutta prima andare crescendo, deve ben presto assumere volori assai ed assai grandi in corrispondenza del tratto molto piatto della curva (1), e tornare meno rapidamente a decrescere, a valere anche più piccoli de quelli iniguali.

Infine ci è stato possibile spiegare il fatto seguente che finora è stato riguardato come un enigma impenetrabile.

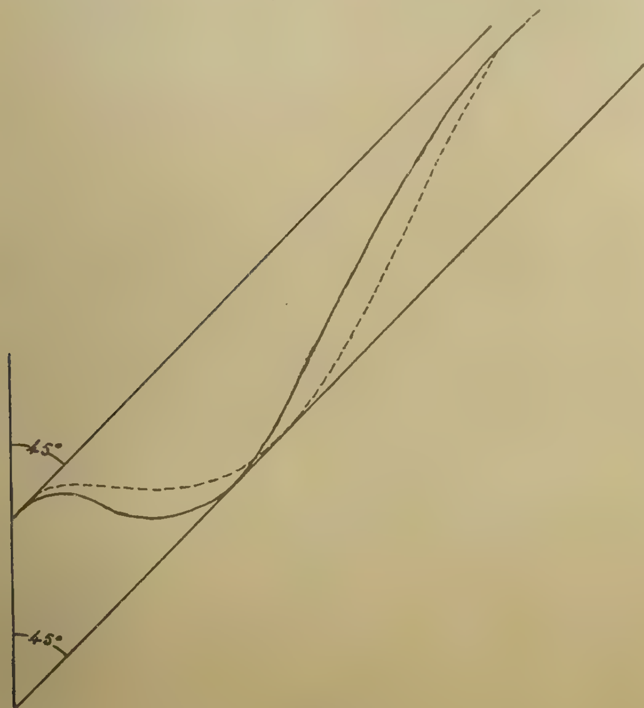


Figura 3

Il numero delle « variabili » a corto periodo cioè quelle di cui l'intero cambiamento si compie in pochi giorni è molto pocco, in paragone al numero delle rimanenti. Anzi, ordinando le variabili conosciute in gruppi, col criterio del periodo crescente, si era trovato che il

(1) Esso stà infatti ad indicare che la luce emessa lungo un tempo molto lungo che potrebbe essere di molti mesi, ci giunge in un intervallo assai più ristretto, per esempio di alcune settimane.

numero di stelle che risultano comprese in ciascum gruppo cresce rapidamente con la lunghezza del periodo, raggiunge un massimo per periodi tra 350 e 400 giorni, e diminuisce subito, tanto che pochissime presentano periodi vicini a 450 giorni, e solo qualcuna vicino a 500 giorni.

Bene, di questa strana « legge statistica » di cui non si era potuta intuire la più lontana spiegazione, la teoria balistica ci dà chiara ragione.

Non potendo più abusare della cortese attenzione del lettore, ci affrettiamo a concludere, non sensa aver notato che non a questi soli fatti si limita l'accordo fra provisioni nuove ed osservazioni vecchie. Si tratta di un accordo più vasto e più profondo, il quale venuto in modo affatto spontaneo, e quindi libero da ogni inquinamento per parte di *pericolose suggestioni*, costituisce la migliore prova in favore del postulato balistico, prova della sua fecondità, prova della sua « *verità* », intesa nel senso in cui la scienza suole usare questa parola.

« Verità » che refulge ancora più limpida e più bella quanto si faccia un confronto fra la semplicità e la « *docilità* » con cui l'ipotesi balistica si adagia sul terreno scientifico, e lo sconvolgimento che quella di Einstein vi determina; fra i frutti concreti imponentissimi che la prima di un sol colpo ci ha dato, e l'infecondità estrema dell'altra, che *cerca ancora* un punto d'apoggio nella conferma delle sue modestissime previsioni.

E chiudiranno affidando alla critica severa ed illuminata, ma *serena,* del mondo colto l'esame di queste prove astronomiche, e della nuova teoria delle « stelle variabili », che il postulato di Ritz ci ha *spontaneamente* suggerito.

Il giudizio che presto o tardi verrà, riporterà luce e semplicità sull'orizzonte scientifico; additerà ancora — giova crederlo — la vecchia e gloriosa rotta al nostro pensiero, quella rotta che è stata tanto feconda e su cui farà ancora molto cammino, prima che nuovi e « *ben securi fatti* » potranno costringerci ad abbandonarla per sempre.

LA INTERPOLACIÓN EN EL CASO DE UNA O VARIAS VARIABLES

Por BERNARDO IG. BAIDAFF

I

EL PROBLEMA DE LA INTERPOLACIÓN

En el número 67 de la *Contribución al estudio de las ciencias físico-matemáticas de la Universidad Nacional de La Plata*, páginas 407-410, el doctor H. Broggi extiende la noción de función interpolar al caso de dos variables.

En la presente Memoria se consignan algunos resultados de una investigación más profundizada de las dos clásicas fórmulas de interpolación de Lagrange y de Newton, las cuales se derivan de un solo método general.

El problema de interpolación en un último análisis consiste en: *Determinar un polinomio de grado* $(n-1)$ *en* x,

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1} x^{n-1} \tag{1}$$

que para $x = x_i \, (i = 1, 2, \dots, n)$ *dé respectivamente* $y = y_i \, (i = 1, 2, \dots, n)$ o con otras palabras, que sea compatible para los pares de valores (x_i, y_i) donde es $i = 1, 2, \dots, n$.

Los geniales matemáticos, Lagrange y Newton, resuelven este problema poniendo respectivamente

$$y = \sum_{i=1}^{n} L_i (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \tag{2}$$

$$y = N_0 y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} N_i (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i), \tag{3}$$

donde los coeficientes L_i, N_i se determinan luego teniendo en cuenta los datos del problema particular. Una vez determinados estos coeficientes, los coeficientes A_i de (1) — si se necesitan expresamente — se obtienen teóricamente con facilidad efectuando las demás operaciones indicadas por los paréntesis.

No está demás recordar : los coeficientes A_i se pueden obtener directamente substituyendo a x e y por los pares de valores (x_i, y_i) con $i = 1, 2, ..., n$ y resolviendo luego el sistema de n ecuaciones en A_0, A_1, ..., A_{n-1}.

Si se considera *a posteriori* las tres soluciones que anteceden, se llega a las siguientes conclusiones :

1ª Tienen algo común, y es, que son compuestas de varios polinomios parciales, en número de n;

2ª Se diferencian una de la otra precisamente por los polinomios parciales que intervienen en su estructura; y en estas conclusiones se inspira de modo natural el siguiente método genérico de resolver el problema fundamental de la interpolación :

Se eligirán convenientemente n distintos polinomios $f_i(x)$ de grados no superiores a $n - 1$, pero de los cuales por lo menos *uno* que sea de este grado, y luego se determinarán n coeficientes B_i tales que de

$$y = \sum_{i=1}^{n} B_i f_i(x) \qquad (4)$$

se deduzca para $x = x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ respectivamente $y = y_i$ con $i = 1, 2, ..., n$.

Son, en efecto, como se desprende al establecer las respectivas analogías, para el método de Lagrange

$$f_i(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n) \qquad (5)$$

con

$$i = 1, 2, ..., n$$

y para el método de Newton

$$f_1(x) = y_1; \qquad f_2(x) = (x - x_1); \qquad f_3(x) = (x - x_1)(x - x_2); \qquad (6)$$
$$f_i(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{i-1})$$

y para el tercer método — sin nombre —

$$f_i(x) = x^i \qquad \text{con} \qquad i = 0, 1, ..., n - 1. \qquad (7)$$

Así presentado el método genérico de resolver el polinomio (1) se desprende que infinitas serán las soluciones particulares que se podrán adoptar.

II

DOS SOLUCIONES GENERALES

Primera solución. — Se substituirán los valores (x_i, y_i) en la forma (4) y se resolverá luego el sistema de n ecuaciones en B_i. Se encuentra, como resultado de calcular las B_i y de substituirlas en (4), la siguiente fórmula :

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1) f_2(x_1) \dots f_{i-1}(x_1) & y_1 & f_{i+1}(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_i) f_2(x_i) \dots f_{i-1}(x_i) & y_i & f_{i+1}(x_i) & \dots & f_n(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) f_1(x_n) \dots f_{i-1}(x_n) & y_n & f_{i+1}(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(x_1) f_2(x_1) \dots f_{i-1}(x_1) f_i(x_1) & f_{i+1}(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_i) f_2(x_i) \dots f_{i-1}(x_i) f_i(x_i) & f_{i+1}(x_i) & \dots & f_n(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) f_2(x_n) \dots f_{i-1}(x_n) f_i(x_n) & f_{i+1}(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}} \qquad (8)$$

Esta fórmula puede llamarse *fórmula generalizada de interpolación a la Newton.* Al numerador del coeficiente de f_i se le llamará *newtoniante* [1] de índice i de las funciones $f_i(x_j)$ con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$ y de las $y_1, y_2, \dots, y_n$, y al denominador se le puede consagrar el nombre *interpolante.*

Segunda solución. — Si se escribe la condición de compatibilidad o el eliminante con respecto a las A_i de las n ecuaciones que se obtienen

[1] Podría observarse que el *newtoniante* de índice i se puede obtener del *interpolante* substituyendo la columna i-ésima por las varias y-es, y, por consiguiente, llamar el determinante así obtenido *interpolante de índice i*, pero se verá que suprimiendo los subíndices i de las x_i de las varias funciones que figuran en la línea i se obtiene otras determinantes que por analogía se llamaría también *interpolante de índice i*, y para distinguirlos se les llamaría *interpolante de índice i* de Newton o de Lagrange, lo que se abrevia con la nomenclatura propuesta.

de (4) por las substituciones de (x, y) por los pares (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$, y esa misma ecuación, se obtiene el determinante

$$\begin{vmatrix} y & f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ y_1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ y_2 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

que desarrollado por la primera columna nos da la fórmula

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_{i-1}) & f_2(x_{i-1}) & f_3(x_{i-1}) & \dots & f_n(x_{i-1}) \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1(x_{i+1}) & f_2(x_{i+1}) & f_3(x_{i+1}) & \dots & f_n(x_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & f_3(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_i) & f_2(x_i) & f_3(x_i) & \dots & f_n(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & f_3(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}} \qquad (10)$$

que es una generalización de la fórmula de interpolación de Lagrange, cuyos coeficientes de y_i tiene numeradores iguales a cero para cualquier otro valor de los subíndices de las x_i distintos de i, e iguales a su denominador para el valor i del subíndice. A los numeradores en cuestión se les dará el nombre de *lagrangiantes* de índice i.

III

INTERPOLACIÓN DE NÚMEROS Y DE FUNCIONES DE 1, 2, 3, ..., VARIABLES

Si en la forma

$$y = \sum_{n=1}^{n} B_i f_i(x)$$

se impone a x los valores x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ *solamente en las* $f_i(x)$, se obtendrá un nuevo y original problema interpolatorio, cuyo enunciado sería :

Hallar una función $y = \varphi(x)$ en la cual imponiendo sólo en deter-

minados lugares ocupados por su variable independiente, los n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, esta función dé respectivamente las funciones

$$y_1 = g_1(x), \qquad y_2 = g_2(x), \qquad \ldots, \qquad y_n = g_n(x)$$

conocidas con anticipación.

La solución de este problema se obtendrá por cualquiera de las dos fórmulas (8) o (10), y un ejemplo aclarará el concepto.

Determinar la función y de x

$$y = A_0 + A_1 \{x\} + A_2 \{x^2\} \tag{11}$$

de manera que para $x = x_1$, x_2 o x_3 substituídos en los corchetes, se reduzca a las funciones a, ax, ax^2.

Será por la fórmula (8), si se quiere,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & x_1 & x_1^2 \\ ax & x_2 & x_2^2 \\ ax^2 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}} + \{x\} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & x_1^2 \\ 1 & ax & x_2^2 \\ 1 & ax^2 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}} + \{x^2\} \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & a \\ 1 & x_2 & ax \\ 1 & x_3 & ax^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}} \tag{12}$$

y en particular para $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

$$y = \frac{2ax + \{x\}(ax^2 - a) + \{x^2\}(ax^2 - 2ax + a)}{2} \tag{13}$$

que para esos valores particulares de x substituídos solamente en los corchetes, dan precisamente para y, las funciones a, ax, ax^2.

Observación. — La solución hallada podría escribirse también

$$y = (az^2 - 2az + a)\frac{x^2}{2} + (az^2 - a)\frac{x}{2} + az, \tag{14}$$

pero lógicamente considerada responde al problema particular :

Determinar la función

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

que para $x = -1$, $x = 0$ o $x = 1$ se reduce a las funciones a, az, az^2 (1).

(1) Este problema nos enseña cómo se puede encontrar una familia de curvas que contengan entre las mismas a las curvas

$$y = a, \qquad y = az, \qquad y = az^2,$$

y aun más, como se podría encontrar una familia de curvas (en general hiperfiguras) que contuvieran otras dadas con anticipación.

Si a su vez es z una función de x y en particular $z = x$ se llega a la conclusión que la (13) contiene a las a, ax, ax^2 siempre que se substituya en los corchetes a x por los valores numéricos dados.

Se ha preferido el enunciado de la nota, como paso intermedio, pues encierra una combinación original, un concepto nuevo : x a la vez variable y parámetro; se dará en cambio mayor atención al problema que se considera en esta observación y será empleada para la ampliación del concepto de la interpolación a varias variables.

IV

LA INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES. DOS CASOS PARTICULARES

A fin de facilitar la escritura de las fórmulas (8) y (10) designaremos por N_i, L_i e I a los newtoniantes, lagrangiantes e interpolante que figuran en esas fórmulas, las cuales se convierten en consecuencia en

$$y = \frac{1}{I} \sum N_i f_i(x) \qquad y = \frac{1}{I} \sum L_i y_i. \tag{15}$$

El problema de interpolación en el caso de dos variables x, y, se enunciaría en toda su generalidad como sigue :

Determinar el polinomio $z(x, y)$ de grado $n - 1$ en x, que para $x = x_1$, x_2, ..., x_n se reduzca al sistema de funciones

$$z_1(y), \qquad z_2(y), \qquad \dots, \qquad z_n(y), \tag{16}$$

dadas con anticipación.

El problema se resolverá en toda su amplitud utilizando cualquiera de las dos fórmulas (15). Se eligirán unas funciones convenientes $f_i(x)$ y se harán en (4) las substituciones :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} \text{ (}^1\text{)}$$

correspondientes a x, x_1, x_2, ..., x_n.

Primer caso particular. — Es tan general el problema precedente que conviene particularizarlo en cierto grado.

(1) Quieren estos símbolos decir que el elemento superior es substituído por el correspondiente de la línea inferior.

Al efecto se supondrá que las $z_1(y), ..., z_n(y)$ son a su vez definidas cada una para los sistemas

$$y_{i,1}, \quad y_{i,2}, \quad ..., \quad y_{i,n_i},$$

de valores particulares de la *segunda* variable y, a las cuales les corresponden respectivamente los valores

$$z_{i,1}, \quad z_{i,2}, \quad ..., \quad z_{i,n_i};$$

en que se ha designado para abreviar y por ampliación de un concepto secundario

$$z_i(y_j) = z_{i,j}.$$

En estas condiciones, si $g_{i,j}$ son funciones análogas a las funciones $f_i(x)$ de las fórmulas (8) o (10) se tendrá, por ejemplo, por la fórmula generalizada de interpolación a la Lagrange

$$z_i = \frac{1}{I_i} \sum_{j=1}^{n_i} L_{i,j} z_{i,j} \tag{17}$$

en que I_i es el interpolante correspondiente a las funciones $g_{i,j}$, y $L_{i,j}$ las lagrangiantes correspondientes a las $z_{i,j}$ con $j = 1, 2, ..., n_i$.

Teniendo en cuenta este resultado, la segunda fórmula de (15) da

$$z = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{I_i} \sum_{j=1}^{n_i} L_{i,j} z_{i,j}. \tag{18}$$

Segundo caso particular. — Haciendo $n = m$, $n_i = n$ para $i = 1, 2, ..., n$ en la última fórmula, esto conduce a una mayor particularización del problema general de interpolación de funciones :

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{L_i}{I} \frac{L_{ij}}{I_i} z_{i,j} \tag{19}$$

que a su vez contiene como caso particular la siguiente fórmula que se encuentra en el trabajo mencionado al principio

$$P_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j-1}^{n} A_i B_j z_{ij} \tag{20}$$

y en que P_{mn} es un polinomio de grado $< m - 1$ en x y de grado $\leq n - 1$ en y, que en correspondencia del par de valores $x_i y_j$ ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$) toma el valor z_{ij} y donde son

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i-1}) \ldots (x - x_m)}{(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_m)} \\ B_j &= \frac{(y - y_1) \ldots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \ldots (y - y_n)}{(y_j - y_1) \ldots (y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j+1}) \ldots (y_j - y_n)} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

V

PROBLEMA Y SOLUCIÓN GENERAL DE LA INTERPOLACIÓN

En la primera parte de esta memoria se buscaba una función polinomial que para los valores x_i diera respectivamente los valores y_i y en la segunda se indicaban soluciones. En la parte cuarta se encaran dos problemas típicos : 1° se busca una función polinomial de dos variables que para los mn pares de valores $x_i y_j$ diera los valores z_{ij} (al segundo de los casos particulares estudiados se aluden aquí) y 2° se busca una función polinomial de dos variables que para los valores x_i diera las funciones $z_i(y)$ conocidas con anticipación.

Si se emplea el lenguage geométrico, lo que precede puede traducirse de la siguiente manera :

1° Se busca una línea que pasa por los puntos $P(x_i, y_i)$;

2° Se busca una superficie que pasa por los puntos $P(x_i, y_{i,j_i}, z_{ij_i})$ con $i = 1, 2, ..., m$; $j_i = 1, 2, ..., n_i$ en total $\sum n_i$ puntos o por los puntos $P(x_i, y_j, z_{ij})$ con $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ o sea por mn puntos;

3° Se busca una superficie que contuviera las curvas $C(x_i, z_i(y))$.

Esto facilitará el enunciado de un problema amplísimo de interpolación y su compresión.

Se pide una hiperfigura de m dimensiones

$$z = F(x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_m) \tag{22}$$

que contuviera las n hiperfiguras

$$x_1 = x_1^{(i)} \quad x_2 = x_2^{(i)} \quad ..., \quad x_p = x_p^{(i)} \quad z_i = F_i(x_{p+1}, ..., x_m) \tag{23}$$

con

$$i = 1, 2, ..., n\ (^1).$$

La solución general se obtendrá eligiendo n funciones convenientes f_k de las m variables y se determinarán los coeficientes B_k de la ecuación

$$z = \sum_{k=1}^{n} B_k f_k(x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_m), \tag{24}$$

[1] Por $x^{(i)}$ debe entenderse un valor particular de x y en los n sistemas dados puede ocurrir de que algunos valores de una o varias x sean iguales, debiendo estos sistemas, dos a dos diferir por los menos en uno de los valores de sus elementos.

de manera que substituídas las primeras p variables por los n sistemas de valores de las $x_1, x_2, ..., x_p$ que figuran en (23) sea a su vez $z = z_1, z_2, ..., z_n$. Cualquiera de las dos fórmulas de Lagrange o de Newton (8) y (10) convenientemente modificadas dan la solucion buscada.

VI

CONCLUSIÓN

He dejado consignado en esta memoria, mi manera de ver las soluciones de Newton y Lagrange, y del problema de interpolación en el espacio de dos dimensiones cuya llave esta como se ha visto en la relación (4), y no puedo cerrar estas líneas sin manifestar mi admiración por las bellas funciones concebidas por estos matemáticos, que permitan apreciar los rasgos de sus genios. La misma relación (4) explotada aun más, me ha permitido de una manera muy natural ampliar el concepto de interpolación y a dar un paso más, encontrando un nuevo problema que titulé *interpolación de funciones o de figuras*, que contiene como casos particulares algunas fórmulas que se encuentran en el artículo mencionado al principio, y luego presentar el enunciado general que figura en la parte quinta, como también las soluciones de la parte segunda.

Por fin, no dejaré de pasar estas líneas antes de llamar la atención sobre el poco precisado término conveniente, que brinda amplia oportunidad de investigar algunas otras funciones f_i más útiles por su comodidad según la naturaleza del problema que lo necesita.

LABOR DEL MUSEO DE HISTORIA NATURAL DE LA PLATA

Por el interés que puede presentar para los naturalistas y socios de la Sociedad científica argentina, transcribimos a continuación el informe presentado por el director del Museo, doctor Luis M. Torres, al presidente de la Universidad nacional de La Plata :

Tengo el agrado de dirigirme al señor presidente enviándole una relación breve de la labor realizada durante el año en curso, que ha tenido a bien solicitarme en nota fecha 2 del corriente.

De acuerdo con el plan de tareas que esta Dirección bosquejara en la memoria correspondiente a los años de 1922-1923, en la parte que se refiere al « programa de acción inmediata », hoy ya puedo asegurar que las investigaciones metódicas planeadas fueron efectuadas en Cinco Saltos, territorio de Río Negro, y en las sierras de Curamalal, al sur de la provincia de Buenos Aires, han tenido su comienzo en el pasado mes de abril. El subscrito se trasladó a la localidad de Pigüé, en compañía del doctor R. Lehmann-Nitsche, y, una vez en el terreno, ha tomado todas las medidas del caso para que las investigaciones geológicas, paleontológicas y antropológicas puedan efectuarse sin interrupción.

Estas investigaciones están a cargo, por ahora, de los doctores Juan Keidel (en comisión *ad honorem),* Walther Schiller, Ángel Cabrera y Roberto Lehmann-Nitsche. Los doctores Keidel y Schiller se ocuparán de la parte geológica en sus distintos aspectos y serán los encargados de llevarla a la práctica.

El Museo de La Plata ha sido desde ya favorecido por la ayuda gratuita del estanciero de Pigüé, señor Octavio F. Ducós, y el agrimensor Carlos G. Lehmann ; el primero, poniendo a nuestra disposición una casa-habitación, que servirá de campamento central, situada

en las mismas sierras de Curamalal: y en cuanto al señor Lehmann nos ha facilitado copias en ferro prusiato del levantamiento topográfico efectuado por dicho señor de una considerable superficie en la misma zona.

Se han efectuado, asimismo, otras excursiones de sumo provecho en materia de colecciones y observaciones, en las que han participado: en el mes de febrero, el jefe de trabajos don Pablo Gaggero, al Delta del Paraná, y el preparador de paleontología don Bernardo Eugui, a Juárez, Gorchs y Ernestina. En marzo, el preparador Octavio Fernández, a Villanueva. En el mes de abril, el señor Gaggero, a las islas del Delta; el preparador Eugui a Monte y el preparador Antonio Castro, a las islas del Delta, agregado a la misión que dirigía el arqueólogo doctor Lothrop, del Museum of American Indian, Heye Foundation, de Nueva York. Esta expedición duró los meses de abril, mayo y junio. En junio, el director del Museo hizo dos expediciones a las islas del Delta y a las sierras de Balcarce y Tandil. En julio, el taxidermista Alberto Merkle a Pigüé, y el preparador Castro, nuevamente a las islas del Delta. En septiembre, el jefe del departamento de Botánica, profesor Augusto Scala, fué a Misiones para estudiar la yerba mate. En octubre, el jefe de trabajos señor Gaggero, a Córdoba; el taxidermista Merkle, a San Bernardo, y el preparador Eugui a Tres Arroyos y Ayacucho. En noviembre, el preparador Castro otra vez a las islas del Delta y, en diciembre, el profesor señor Scala con el preparador Castro a las islas del Delta (río Carabelas); el doctor Cabrera con el preparador Eugui a Río Negro y terminan la serie de exploraciones, el preparador Castro, por última vez, al Delta del Paraná y el preparador Eugui a Junín.

De todas estas expediciones se ha traído un abundantísimo material paleontológico, antropológico, arqueológico y botánico. Las series de restos de dinosaurios procedentes de Río Negro son sumamente importantes. Han ingresado al departamento más de tres mil piezas completas y se tiene preparado todo un esqueleto.

Todo el material que ha ingresado este año se incorporará a nuestras colecciones después que esté debidamente estudiado y clasificado.

Esta dirección ha continuado manteniendo activa correspondencia con las principales instituciones similares de Europa y América y especialmente con los museos de Inglaterra, Estados Unidos, Brasil y Chile y puedo manifestar que el intercambio de publicaciones y colecciones es cada vez más activo.

Las publicaciones oficiales del Instituto siguen su desarrollo gradual. Se ha publicado en este año de 1925 un tomo de la *Revista,* el XXVIII, y se ha reanudado la última serie de los *Anales,* que, en su sección de Mineralogía y Geología, hacía 25 años que no se publicaban. Con este motivo, esta Dirección ha recibido verdaderas muestras de complacencia por la reaparición de los *Anales* y estará demás decir que, mediante este nuevo esfuerzo editorial, se logrará reanudar, también, el canje de publicaciones valiosas que, en parte, estaba interrumpido. Para continuar la serie de los *Anales* están en preparación monografías completas de carácter paleontológico y arqueológico que aparecerán posiblemente a fines de 1926. También está en prensa la *Guía general del Museo,* con lo que quedará completa la parte del programa que esta Dirección se ha trazado en punto a publicaciones.

Por último, señor presidente, puedo considerar como un hecho la construcción de ampliaciones de las salas de exhibición en los departamentos de antropología, paleontología y arqueología y de dos locales para biblioteca, todas ellas presupuestadas en pesos 238.000 moneda nacional. En cuanto a las otras sumas destinadas al fomento de los trabajos de este Instituto, quiero significarle el profundo agradecimiento de esta Dirección y de todos sus colaboradores por la decidida protección que hemos recibido del señor presidente.

En el departamento de antropología, su jefe, el doctor R. Lehmann-Nitsche, proyecta los trabajos siguientes para 1926 :

Expediciones. — Un viaje al Neuquen para estudiar ciertos detalles de los indígenas araucanos y buscar representantes del Puelches.

Publicaciones (para los *Anales).* — *Investigaciones antropológicas sobre los Onas (Tierra del Fuego).*

Arqueología peruana. — *El Templo del Sol del Cuzco y su altar mayor.*

Para la *Revista.* — Mitología sudamericana : XII : *La astronomía de los araucanos.*

Durante el año actual, las colecciones antropológicas han sido aumentadas con el variado y selecto material extraído de las islas del Delta del Paraná, en las numerosas expediciones que se hicieron, entre ellas por las practicadas con la colaboración del representante del Museo del Indio Americano de Nueva York, doctor Lothrop, ya citado. Entró también la gran colección de moldes del material osteológico del hombre fósil y de los antropomorfos, adquirida de la casa Krantz por el jefe del departamento durante su estada en Europa, en

1923. Parte de este material ha sido colocado en las seis vitrinas bajas, con que se ha aumentado la exhibición en la sala de Antropología.

La visita del eminente egiptólogo, Mr. Moret, fué aprovechada para pedirle la determinación de las pocas piezas del antiguo Egipto que posee esta sección, entre las cuales resultaron, con gran sorpresa y satisfacción nuestra, algunas rarezas de primer orden.

El jefe del departamento ha publicado durante este año cinco monografías sobre Mitología americana en la *Revista del Museo* y dos monografías sobre los idiomas toba y mataco en el *Boletín de la Academia nacional de ciencias de Córdoba.*

Por invitación especial del decano de la Facultad de humanidades, dió en mayo de este año una conferencia de extensión universitaria sobre el tema « El hombre precolombiano ».

Como profesor de antropología ha dictado el curso de esta materia a los alumnos del Museo y, por correlación, a los de la Facultad de humanidades y ciencias de la educación, y como jefe del departamento ha continuado el catálogo de las colecciones, que está al día.

El departamento de botánica ha entrado en un período de franca organización y progreso. El profesor Scala proyecta cumplir todo un plan de investigaciones fitogeográficas, como fué expuesto en la memoria de los años 1922 y 1923.

En zoología se continuará con la clasificación, rotulaje y preparación de los nuevos grupos biológicos de la fauna argentina, tal como los ha planeado el doctor Carlos Bruch, con la colaboración del doctor Roberto Dabbene.

En Mineralogía y Geología el doctor W. Schiller continuará sus estudios sobre la región norte de la Patagonia, que son consecuencia de los datos tomados en las últimas expediciones, de las que ha traído un riquísimo material de focas, minerales y fósiles.

En paleontología, a cargo del doctor Ángel Cabrera desde el mes de septiembre último, el jefe del departamento tiene en preparación, para el año próximo, los siguientes trabajos :

Publicación de una memoria sobre cetáceos fósiles del Museo (trabajo de investigación realizado en 1925);

Revisión de los perisodáctilos fósiles argentinos;

Revisión de los elefantes fósiles argentinos;

Estudio de los peces fósiles argentinos;

Modificación de algunas salas de exhibición al público, especialmente en cuanto a la presentación de las colecciones de dinosaurios

y las instalaciones ilustrativas de la historia popular del megaterio y de la evolución del caballo en la América del Sur;

Formación del catálogo general de las colecciones paleontológicas por fichas.

En biología, el jefe del departamento doctor Miguel Fernández ha dedicado especialmente su atención a la enseñanza, dictando los cursos de herencia, invertebrados y trabajos de laboratorio, que han sido seguidos por los alumnos con gran aprovechamiento. Aparte de estas tareas, el doctor Fernández ha ordenado y revisado varios de los trabajos póstumos del doctor Santiago Roth y su manuscrito sobre *El desarrollo de la dentadura de los Notoungulados, Ungulados y Primates,* que podrá estar listo para su publicación a mediados del año próximo. Para fines del mismo año espera poder dar término a su propio trabajo sobre *La anatomía microscópica y el desarrollo de la coraza de Dasypus Villosus.*

En cuanto a la exhibición en las salas del departamento, el jefe propone exponer los esqueletos ya existentes en una forma más adecuada, a fin de que puedan ser examinados en detalle por el público; agregar otras formas importantes que aún no se hallan representadas en la colección, entre otras, el esqueleto completo de la *Balaenoptera Miramaris* Lahille; organizar una exposición de osteología comparada, para demostrar las modificaciones que sufre un mismo hueso o una región en la serie de los vertebrados; exponer preparaciones de anatomía microscópica en forma accesible para el público.

De las tareas de la secretaría, de por sí complicadas y diariamente sostenidas, tendría que dar un extensísimo informe y al mismo tiempo rogar al señor presidente quisiera tener a bien dotar a este Instituto de alguna plaza más en su personal, por tratarse de tareas que cada vez van en aumento, y porque quedan comprendidos bajo la secretaría, el archivo, la biblioteca, contabilidad y la dirección del personal auxiliar del Instituto.

El año 1925 ha sido altamente benéfico para la tranquilidad del Museo y para el éxito de todos los trabajos emprendidos. Merece una mención especial la atención con que el Consejo académico ha emprendido y llevado a feliz término el estudio de una cuestión tan importante como la reforma del plan de estudios vigentes en la Escuela de ciencias naturales de este Instituto, que recientemente ha sido elevado a la presidencia. Debo hacer constar que a las sesiones del Consejo en que se discutió esta reforma, asistió la casi totalidad de sus miembros y que todos los acuerdos fueron tomados por unanimi-

dad. Considero un deber de justicia dejar constancia de la labor eficiente del señor ingeniero N. Besio Moreno, no sólo como consejero de este Instituto, sino como su representante en el Consejo superior.

La biblioteca ha tenido, en este año, un desarrollo considerable, que puede apreciarse mejor si se compara con el movimiento habido durante el año próximo pasado.

	Año 1924	Año 1925
Número de revistas...........	1832	2814
— folletos...........	226	563
— volúmenes........	185	745
Cartas geográficas............	50	54

Asistieron durante el año más de 117.000 personas. Es frecuente que en los días jueves asistan más de 500 y los domingos más de 2000. El Museo está abierto todos los días.

Las tareas que actualmente se realizan en los distintos departamentos por jefes y personal a sus órdenes, tienden más a dar al Museo el carácter de una institución que se preocupa de contribuir a la elaboración de la ciencia, en las diversas ramas que constituyen ese plan.

Nos es satisfactorio hablar de un plan que fuera expuesto en la Memoria de 1922 y 1923.

Se trabaja, pues, pero organizadamente, sin apresuramientos y más bien, y desde el año próximo pasado, a ritmo pausado, después de la tarea preliminar que le tocara a la dirección de reorganización total, en su carácter de instituto y en sus planes de investigación y con el consejo lo ha realizado también en cuanto a la enseñanza.

LA OBRA BOTÁNICA DEL PROFESOR LUCIEN HAUMAN

POR EL ING° AGR° LORENZO R. PARODI

Con la actuación científica del profesor Lucien Hauman parece iniciarse una nueva fase en la evolución de los estudios botanicos en el país, por los métodos modernos que de una manera constante aplica en sus estudios.

El ingeniero agrónomo Hauman llegó al país en el año 1904, llamado por nuestro gobierno para dictar las clases de Botánica, Fitopatología y Microbiología en el Instituto superior de agronomía y veterinaria (hoy Facultad de la Universidad de Buenos Aires), fundado en aquella época, siendo ministro de agricultura el doctor W. Escalante. Desde entonces se dedica al estudio de nuestra flora y a la enseñanza de la botánica en nuestro país. Sus primeras publicaciones las inició en Europa, cuando trabajaba en el Instituto Pasteur, de Bruselas. Las publicaciones puramente botánicas datan de algunos años después de su llegada al país, cuando hubo efectuado diversos viajes en el interior, que le permitieron reunir el material necesario para conocer nuestra flora tan rica.

En un ambiente nuevo y con una orientación hacia la biología vegetal, como la que había adquirido con Laurent, Massart y Bordet, debió, para realizar su ideal, dirigir sus investigaciones en diversos sentidos y, naturalmente, empezar por el conocimiento de las especies, siempre indispensable para efectuar estudios ulteriores. Esta es la razón de la diversidad de temas que debió abordar (monografías, fitogeografía, etología, etc.). Desde las primeras publicaciones deja ver su deseo de organización (*Tratado de botánica*, con un repertorio de las familias fanerogámicas de nuestra flora conocidas hasta entonces; *Catálogo de los parásitos vegetales de nuestras plantas cultivadas*, etc.). Este deseo se ha cumplido con la iniciación del catálogo de

los Fanerógamas argentinas, con las citas bibliográficas correspondientes. Esta obra, cuyos dos primeros tomos han aparecido ya, influirá favorablemente en la organizacion y producción de estudios ulteriores porque permitirá llevarlos a termino, aun lejos de las grandes bibliotecas, sin olvidar los trabajos de los otros naturalistas que, como se sabe, se hallan dispersos en un incalculable número de obras, revistas y monografías.

He aquí la serie de trabajos del señor L. Hauman. A la lista de publicaciones puramente botánicas, he agregado sus otras publicaciones para completar así la bibliografía de sus veinticinco años de labor científica.

MONOGRAFÍAS

1. *Notes sur les Phytolacaccées argentines*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural*, tomo XXIV, páginas 471-516, 1913.

2. *Notes sur les Joncacées des petits genres andins*, en *Ibidem*, tomo XXVII, páginas 285-306, 1915.

3. *Note sur « Hydromystria stolonifera » Mey.*, en *Ibidem*, tomo XXVII, páginas 325-331, 1915.

4. *Les Alismatacées argentines*, en *Ibidem*, tomo XXVII, páginas 307-324, 1915.

5. *Note preliminaire sur les « Hordeum » spontanés de la flore argentine*, en *Ibidem*, tomo XXVIII, páginas 263-316, 1916.

6. *Les Dioscoréacées de l'Argentine*, en *Ibidem*, tomo XXVII, páginas 441-513, 1916.

7. *Notes sur les espèces argentines des genres « Azorella » et « Bolax »*, en *Physis (Revista de la Sociedad Argentina de Ciencias Naturales)*, tomo IV, páginas 468-500, 1919.

8. *Las palmeras de la Flora argentina*, en *Ibidem*, tomo IV, páginas 602-608, 1919.

9. *Notes sur le genre « Chloraea » Lindley*, en *Mem. publ. par l'Acad. roy. de Belgique (classe des sciences)*, in 8°, II ser., tomo VI, 31 páginas, 1921.

10. *Note sur le « Drimys Winteri » Forst. et les especes voisines*, en *Comunicaciones del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo II, número 4, páginas 45-52, 1923.

11. *Notes sur le saule sud-américain et sur la valeur des espèces botaniques de Molina*, en *Physis*, tomo VII, páginas 67-81, 1923.

12. *Les Aristolochiacées de l'Argentine et de l'Uruguay*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXXII, páginas 315-338, 1923.

13. *The genus « Poissonia » Baill.*, en *Bullet. Mis. inf. Royal Bot. Gard. Kew*, tomo VI, página 276, 1925. (Versión francesa. en *Comunicaciones del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, t. II, nº 20, 1925.)

14. *Notes sur le genre « Boussingaultia » H. B. K.*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXXIII, páginas 347-359, 1925.

FLORÍSTICA

15. *Nuevas especies de plantas andinas (alta cordillera de Mendoza)*, en *Apuntes de Historia Natural*, tomo I, páginas 54-58, 1909.

16. *Cypella nova argentina (C. Wolffhuegeli* Haum. Mk.)., en *Ibidem*, páginas 84-86.

17. *Phytolaccae novae argentinae*, en *Ibidem*, páginas 107-110.

18. *Note sur la distribution geographique de deux Lycopodiales peu connues de la flore argentine*, en *Ibidem*, páginas 171-172.

19. *Quelques Orquidées de l'Argentine*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXIX, páginas 353-389, 1917.

20. *Algunas plantas de las altas cordilleras de San Juan*, en *Physis*, tomo III, páginas 419-420, 1917.

21. *A propósito de las rectificaciones del doctor C. Spegazzini*, en *Ibidem*, tomo III, páginas 423-424, 1917.

22. *¿ « Ilex brevicuspis » Reiss. en la cumbre de la cordillera de Mendoza ?*, en *Ibidem*, tomo III, páginas 426-427, 1917.

23. *El género « Octomeria » y otras Orquídeas erróneamente citadas del país* (contestación a una crítica), en *Ibidem*, tomo III, páginas 434-436, 1917.

24. *El género « Microcala » Lk. et Hoffm. en la Argentina*, en *Ibidem*, tomo III, página 442, 1917.

25. *Nótula sobre « Plantago aquatilis » Griseb.*, en *Ibidem*, tomo III, paginas 442-443, 1917.

26. *Catalogue des Phanérogames de l'Argentine*, volumen I *(Gymnospermes et Monocotylédones)*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXIX, páginas 1-347, 1917 (en colaboración con G. Vanderveken). Una comunicación preliminar aparece en *Primera Reunión Nacional de la Sociedad Argentina de Ciencias Naturales en Tucuman*, 1916, páginas 279-286, 1918-1919, bajo el título : *La Flora fanerogámica en la Argentina*.

27. *Notes floristiques (quelques Criptogames, Gymnospermes et Monocotylédones de l'Argentine)*, en *Ibidem*, tomo XXIX, páginas 391-444, 1917.

28. *Nuevas familias de Fanerógamas para la Flora argentina*, en *Physis*, tomo IV, páginas 582-587, 1919.

29. *Orquidées argentines* (IIme série), en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, XC, páginas 95-154, 1921.

30. *Deux graminées géantes de la flore argentine*, en *Physis*, tomo V, páginas 52-56, 1921.

31. *La distribución geográfica del género « Chloraea » Lindl.*, en *Ibidem*, tomo V, páginas 293-295, 1922.

32. *Nótula sobre « Oxyosmyles viscosissima » Speg.*, en *Ibidem*, tomo V, páginas 306-307, 1922.

33. *El género « Proserpinaca » L. en la América del Sur* (con una lista de las Haloragáceas conocidas para el país), en *Ibidem*, tomo VI, página 151, 1922.

34. *Catalogue des Phanérogames de l'Argentine*, volumen II *(Dicotylédones : Piperaceae-Droseraceae)*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXXII, páginas 1-314, 1923 (en colaboración con L. H. Irigoyen).

35. *Nota sobre el « Philodendron Tweedianum » Schott y algunas Aráceas argentinas*, en *Physis*, tomo VIII, páginas 99-103, 1925.

36. *Notes floristiques* (IIème série) *Dicotylédones de l'Argentine*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXXII, páginas 395-475, 1925.

37. *Les Phanérogames adventices de la flore argentine*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXXIII, páginas 319-345, 1925.

ETOLOGÍA

38. *Observaciones etológicas y sistemáticas sobre las dos especies argentinas del género « Elodea »*, en *Apuntes de Historia Natural*, tomo I, páginas 164-171, 1909.

39. *Sobre la polinación de una Malpighiácea del género « Stigmaphyllon »*, en *Physis*, tomo I, páginas 81-87, 1912 (reeditado en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, n°s 70-71, págs. 159-165, 1914).

40. I, *Observations d'Ethologie florale sur quelques espèces argentines et chiliennes.*

II. *Observations sur la pollinat. d'une Malpigh. du g. Stigmaphyllon.*

III. *Sur un cas de geotropisme hydrocarpique chez « Pontederia rotundifolia » L.*

IV. *Observations éthologiques et systématiques sur deux espèces argentines du genre « Elodea ».*

Recueil de l'Institut botanique Léo Errera, tomo IX, páginas 1-39, 1912. (I, reproducido en *Revista Chilena de Historia Natural*; III, traducido por G. Bordelois, en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, nº 89, págs. 91-95, 1917.)

41. *Sobre una supuesta « Heterocarpia » de « Tragia volubilis » L.*, en *Physis*, tomo V, páginas 304-306, 1922.

FITOGEOGRAFÍA

42. *Étude Phytogéographique du rio Negro inférieur*, en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires*, tomo XXIV, páginas 289-444.

43. *La forêt valdivienne et ses limites (Notes de géographie botanique). Recueil de l'Institute de Botanique Léo Errera*, tomo IX, páginas 346-408, 1913 (reeditado en *Trabajos del Instituto de Botánica y Farmacología de la Facultad de Ciencias Médicas de Buenos Aires*, nº 34, págs. 1-91, 1916).

44. *Relación entre la vegetación natural de los suelos y su valor agrícola*. Primera reunión de experimentadores agrícolas, abril, 1916, ministerio de Agricultura (Dirección de enseñanza agrícola), número 65, páginas 178-180, 1917.

45. *La vegétation des hautes cordillères de Mendoza*, en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, tomo LXXXVI, páginas 121-188 y 225-348, 1918.

46. *La vegetación primitiva de la ribera argentina del Río de la Plata*, en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, número 96, páginas 345-355, 1918-1919.

47. *Notes sur la flore argentine et ses relations avec l'élevage*, en *Annales de Gembloux*, tomo XXV, páginas 140-150, 1919.

48. *Ganadería y geobotánica en la Argentina*, en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, número 102, páginas 45-65, 1920.

49. *Un viaje botánico al lago Argentino* (Patagonia), en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, tomo LXXXIX, páginas 179-281, 1920.

50. *Viaje botánico a la región de las Araucarias del Neuquen* (resumen de una comunicación), en *Physis*, V, página 72, 1921.

51. *Aclaración sobre la región de « Los bosques y sabanas subtropicales »*, en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, número 107, páginas 16-21, 1922, con un esquema de la repartición de los vegetales en Tucumán y un perfil fitogeográfico de la República Argentina entre los grados 26 y 27 de latitud sur.

52. *La vegetación de la isla Martín García* (resumen de una comunicación), en *Physis*, tomo VII, página 55, 1923.

53. *Un viaje botánico desde Embarcación a Yacuiba* (resumen de una comunicación), en *Ibidem*, tomo VII, página 134, 1923.

54. *La végétation de l'ile de Martín García, dans le rio de la Plata*, en Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires, Instituto de investigaciones geográficas, número 10, 38 páginas, 1925.

FITOPATOLOGÍA

55. *Enfermedades de las plantas cultivadas en los alrededores de Buenos Aires,* en *Boletín del Ministerio de Agricultura,* tomo X, página 98, 1908.

56. *Contribution à l'étude des altérations microbiennes des organes charnus des plantes,* en *Anales del Instituto Pasteur,* número 7, página 501, 1913.

57. *Acción del Mucor stolonifer Erbg. sobre la « Ipomoea batata »* (la podredumbre de la batata dulce), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* número 68, páginas 5-9, 1914.

58. *Les parasites végétaux des plantes cultivées en Argentine et dans les régions limitrophes,* en *Anales del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires,* tomo XXVI, páginas 163-225, 1914 (resumido en *Centralblätt fur Bakter.,* t. 43, págs. 420-424, 1915).

59. *A propósito del « pasto dulce » y de la enfermedad que causa en el ganado,* en *Anales de la Sociedad Rural Argentina,* volumen LI, página 379, 1917.

60. *Los parásitos vegetales de las plantas cultivadas en la República Argentina,* en *Revista de la Facultad de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* tomo III, páginas 227-274, 1921 (en colaboración con Lorenzo R. Parodi).

61. *Sobre un parásito de las flores del « Paspalum dilatatum »,* en *Physis,* tomo V, páginas 327-328, 1922.

62. *Sobre una curiosa deformación del huésped causada por una Ustilagínea (Mycosyrinx cissi* (DC.) Brk.), en *Physis,* tomo V, página 332, 1922.

63. *Apuntes sobre profilaxia de las enfermedades parasitarias en las plantas cultivadas,* en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* número 125, páginas 142-148, 1925.

MICROBIOLOGÍA

64. *Étude microbiologique et chimique du rouissage aérobie du lin,* en *Anales de l'Institut Pasteur,* tomo XVI, páginas 379-385, 1902 (reeditado en *Rech. Biol. Exp. Gembloux* (1903), por E. Laurent).

65. *Determination du pouvoir antiseptique du « Bacillol »,* in *L'Ing. agricole de Gembloux,* tomo XIII, páginas 542-546, 1902-1903.

66. *Apuntes de vulgarización sobre la depuración biológica de las aguas cloacales* (con un plano). Edición del mapa topográfico y geológico de la provincia de Buenos Aires, La Plata, 30 páginas, 1910.

67. *Anticuerpos y suerodiagnósticos* (hechos fundamentales, teorías, aplicaciones), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* números 21-23, 29 páginas, 1910.

68. *La sistemática de los bacterios*, en «*Chemia*», *Revista del Centro Estudiantes doctorado en Química*, tomo II, páginas 236-247, 1923.

69. *Reflexiones sobre la obra de Pasteur* (alocución pronunciada en la Facultad de Agronomía y Veterinaria en ocasión del centenario del sabio), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, número 3, páginas 4-8, 1923 y *Revista del profesorado secundario*, número 35, página 3, 1923.

BIBLIOGRAFÍA

70. *Apuntes para la «bolilla» de Bibliografía botánica* (con una introducción fuera de programa), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, número 91, 22 páginas, 1917.

71. *Un olvido bibliográfico* (a propósito de un trabajo de R. A. Philippi sobre flora patagónica), en *Physis*, tomo III, páginas 420-423, 1917.

72. *La obra botánica del doctor M. S. Bertoni*, en *Ibidem*, tomo IV, páginas 139-142, 1918.

73. *Apuntes de bibliografía botánica* (2ª edición puesta al día), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, número 104, páginas 57-80, 1921.

74. *Bibliografía botánica argentina* (especialmente para los años 1914-1921), en *Physis*, tomo V, páginas 263-291, 1922 (en colaboración con A. Castellanos).

75. *La obra botánica del doctor C. Spegazzini*, en *Physis*, tomo VI, páginas 303-308, 1922.

OBRAS DIDÁCTICAS Y PUBLICACIONES RELACIONADAS CON LA ENSEÑANZA

76. *Botánica* (obra adaptada a los programas universitarios), 272 páginas, Buenos Aires, 1910.

77. *El jardín botánico de la Facultad de Agronomía y Veterinaria* (con un plano del jardín), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, números 17-20, 11 páginas, 1910.

78. *Apuntes de microbiología sacados de clase por J. J. Morrison*, en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, 123 páginas, 1916 (2ª edición con la indicación de los trabajos números 64, 66, 67 y 68 de esta lista, Buenos Aires, 1924).

79. *Nuevos reglamentos sobre profesores adscritos y suplentes* (comunicación del profesor L. Hauman al decano de la Facultad de Agronomía y Veterinaria), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires*, número 85, páginas 143-146, 1916.

80. *Las mitocondrias: elemento fundamental de la célula viviente,* en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* número 90, páginas 223-229, 1917.

81. *Las ciencias naturales en la enseñanza secundaria* (resumen de una conferencia pronunciada en el Museo Social en julio de 1918), *Ibidem,* tomo XIII, páginas 62-66, 1920.

82. *Notas explicativas para las láminas murales «Nuestros árboles»,* pintadas por C. Villalobos-Domínguez. Editadas por el Consejo nacional de educación de Buenos Aires, 54 páginas, 1921.

83. *Sería conveniente insistir sobre la necesidad, para la agricultura, de que se fomente más activamente en el país los estudios de ciencias naturales y especialmente desde los puntos de vista de su aplicación: a)* praticultura; *b)* silvicultura, en *Boletín de la Universidad Nacional de La Plata,* tomo VII, número 5, páginas 426-428, 1923 (en colaboración con L. R. Parodi). Resumido en *Physis,* tomo VII, páginas 434-436, 1925.

84. *Opiniones del doctor L. Hauman* (nota sobre la nueva reglamentación de ingreso a la Facultad), en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* número 116, páginas 167-170, 1924.

85. *Proyecto para una reforma de los estatutos universitarios, Ibidem,* número 116, páginas 170-171, 1924.

MISCELÁNEA

86. *Étude de la dispersion de l'Acide phosphorique dans les produits de l'ecrémage centrifuge. Congrès agricole Namur,* páginas 393-397, 1901 (en colaboración con L. Marcas).

87. *Empleo de una solución cuprofórmica para la conservación de órganos y tejidos vegetales,* en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* número 8, 3 páginas, 1909.

88. *Informe sobre los trabajos de mejoramiento de trigos, realizados por el señor G. O. Bakhouse,* en *Nuestra Tierra,* volumen II, número 29, página 26, 1918.

89. *Nomina conservanda et nomina regicienda,* en *Physis,* tomo VI, páginas 88-98, 1922.

90. *Sobre la «brea» del «pájaro bobo»,* en *Physis,* tomo V, página 331, 1922.

91. *Para la protección de la Naturaleza en la República Argentina,* en *Physis,* tomo VI, páginas 283-300, 1922, con 8 láminas. (Reproducido en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* 1922.)

92. *Una nueva y curiosa manera de designar la República Argentina,* en *Physis,* tomo VII, página 65, 1923.

93. *Prólogo de la obra: Las plantas forrajeras indígenas y cultivadas en la República Argentina,* publicación de la Universidad de Buenos Aires, Facultad de Agronomía y Veterinaria, páginas 9-15, 1923. Reproducido en *Revista del Centro Estudiantes de Agronomía y Veterinaria de Buenos Aires,* números 112-113, páginas 3-9, 1923, bajo el título *Ciencia, Agricultura y Administración,* y en *Agros,* revista de la Asociación de estudios de Agronomía, números 13-93, páginas 21-27, Montevideo, julio de 1925.

NOTICIAS VARIAS

— —

Homenaje tributado en Méjico en memoria del ingeniero Santiago E. Barabino

El día 12 de marzo del corriente año la Sociedad de geografía y estadística de Mejico realizó una sesión de carácter solemne en homenaje al ingeniero Santiago E. Barabino. El ingeniero mejicano Hijar y Haro pronunció en ella el discurso que publicamos a continuación.

Señor vicepresidente.
Señores consocios:

A la natural distancia a que obligan los 54 grados geográficos que teóricamente nos separan de Santiago de Chile y Buenos Aires, que prácticamente se traducen en 9000 kilometros vía Valparaíso y los Andes, y en algo así como 12.000 kilómetros doblando el Cabo San Roque de la inmensa costa brasileña hasta nuestro principal puerto y esta Capital, necesitamos agregar, para disculpar nuestro atraso en cuanto a oportunismos de comunicaciones espirituales, científicas y políticas, traer a colación, en esta vez con respecto a las primeras, la muy censurable y recíproca indiferencia de los asociados en lo que concierne a sus relaciones, con los otros centros científicos, ayunos de las distinciones que reciben sus miembros de parte de otras instituciones, y aún más, de las luchas y de las actividades de cada cual, amén del aislamiento, poco interrumpido, en que sus miembros viven, conformándose frecuentemente con la correspondencia bien limitada de las relaciones oficiales de sus juntas directivas.

Estas tristes verdades, que aquí no desconocemos y tampoco son nuevas para nuestros hermanos de raza en la América meridional, sobre no darnos los medios de mejorarlas para conseguir el positivo acercamiento espiritual único para que los hispano americanos llegue-

mos a querernos, las disculpamos, paralelamente con lo antes apuntado acerca de distancias geográficas, diciéndonos que al fin y a la postre conocemos los progresos de los intelectuales en las revistas y memorias de las instituciones, públicas por la prensa diaria, las vías de cable y las inalámbricas.

Parece, señores, que en todo esto, que tiene mucho de verdad, también veremos que falta siempre el medio epistolar frecuente para el fomento de las relaciones afectivas que seguramente han de traernos algo de lo que hasta ahora sin justificación oímos frecuentemente repetir cuando se habla de las fuerzas morales que los países hispano americanos habrán de oponer a las inconsecuencias de los otros fuertes, ya intelectual, moral, económica y físicamente.

Esas bellas características adquiridas tienen abiertos, los caminos materiales que atraen, como en ruedas aladas, las corrientes de la intelectualidad hispanoamericana, a los campos de actividad de razas distintas, y así vemos que aquéllos son los focos de atracción, sin palpar en nuestra parte algo del instinto económico que las distingue, tal como si se tratara de razas superiores en todos sentidos.

Si la superioridad, en el sentido que se considere, se adquiere principalmente por la disciplina del carácter, sigamos practicándola antes que abdicar la herencia de nuestros progenitores, que en cuanto a carácter lo tienen y muy grande,

Es evidente que la independencia para las ciencias no puede existir en el sentido en que debe serlo en el orden político de los pueblos seguramente, pero siempre es necesaria una positiva unión entre los intelectuales de orígenes semejantes; parece que así crecen las fronteras, que hay mejor comunión y más fortaleza entre los países de orígenes semejantes y que así se ayudan espiritualmente, al menos, en las indispensables contiendas raciales en pos de sus ideales respectivos.

Entre estos tópicos giraban nuestras charlas acerca de las distinguidas personalidades, que sólo por mi buena suerte — claro está que no por competencia, — tuve, el para mi inolvidable honor, de tratar en Sud América cuando recibí de esta querida Sociedad, a la vez que de la no menos querida de Antonio Alzate, la honra de representar.

Y ahora las he recordado con motivo del sentido fallecimiento del distinguido ingeniero civil don Santiago E. Barabino, que durante un período de más de 45 años colaboró brillantememte en el amplio campo científico de Argentina, su país natal.

Los círculos sociales, científicos y profesionales, las revistas científi-

cas y técnicas, lamentarán siempre justificadamente esta pérdida. pues el ingeniero Barabino fué, además de cumplido ciudadano, un digno jefe de familia, modelo de amistad, y de empuje intelectual y material para su patria, así como para las instituciones nacionales y extranjeras que tuvieron el honor de contarlo entre sus miembros mas laboriosos y diligentes.

Contaba sólo 22 años cuando en 1875 recibió el título de ingeniero civil en la Facultad de ciencias exactas. En 1877 se hallaba en Italía perfeccionando sus conocimientos, y en 1881, de regreso a la Argentina, principió sus trabajos profesionales en el Departamento de ingenieros civiles, precisamente en la época en que aquel floreciente país iniciaba sus grandes obras públicas, y a las que dió Barabino su valioso contigente técnico durante unos 15 años que estuvo al servicio de la administración pública.

En la Comisión de 1882, para el trazo del ferrocarril Central del norte, tuvo oportunidad de rectificar los errores sufridos en el primer estudio de la sección Tucumán-Salta, desempeñando posteriormente la inspección de las grandes obras de arte como son el túnel y viaducto del Saladillo.

En 1883 asciende a subdirector de la construcción del ramal en la sección de Frías a Santiago del Estero, y un año después fué encargado de la subinspección general de ferrocarriles en el Departamento de ingenieros civiles de la Nación, de donde a poco pasó al cargo de inspector general de ferrocarriles.

En 1887 fué nombrado inspector general de obras hidráulicas, como las que entre otras se hacían en los puertos de Buenos Aires y Rosario.

Hasta 1894 dejó el señor ingeniero Santiago Barabino de prestar sus servicios a la administración pública para consagrarse por el resto de su vida a servir a la cultura de su patria desinteresadamente. Y esa dedicación, como atinadamente dice en su elogio público el distinguido señor don Vicente Añón Suárez, de la Sociedad Científica Argentina , « fué completa, exclusiva y se conservó hasta sus últimos momentos ágil, jovial, al servicio de nobles causas y de empresas útiles ».

La labor profesional del ingeniero Barabino, que llegó a altura tal de hacerle un especialista en materias técnicas de su país, fácilmente halló campo fecundo a sus actividades científicas y administrativas, que supo cristalizar brillantemente.

En 1897 desempeñó nuestro ilustre biografiado la secretaría del Instituto geográfico argentino, y en el año siguiente su delegación

en Italia ante el VII Congreso internacional de navegación y en las sociedades científicas italianas.

Posteriormente formó parte de la comisión directiva encargada de la construcción de la carta geográfica de la República, que aquel instituto acordó publicar cuando el primer centenario de la independencia nacional.

Su actuación en el Centro de ingenieros fué efectiva, siempre habiendo desempeñado su presidencia durante los años de 1911 y 1912, así como la llevada a cabo en los siguientes de 1913 y 1915 cuando tuvo la dirección de *La ingeniería*, a la que pudo aportar la publicación de los estudios e informes sobre las obras en construcción o en proyecto hechos por ingenieros nacionales y extranjeros radicados en la Argentina, y también la discusión de toda clase de proyectos acerca de obras públicas.

Perteneció al Consejo superior del Museo social argentino, como su tesorero y como miembro honorario del Congreso de la habitación que en 1920 organizó el Museo.

Fué, además, secretario general del Comité ejecutivo del Congreso sudamericano de ferrocarriles, en 1921, y reelecto en 1922 cuando el segundo Congreso reunido en Río de Janeiro.

La Comisión municipal, a la que prestó sus conocimientos desde 1919; la Sociedad forestal argentina; el Centro cultural « Latium », del que fué uno de sus fundadores; la Asociación Bernardino Rivadavia y otras más, le tuvieron entre sus miembros distinguidos y en sus directivas en diversos períodos.

Pero si en todas las agrupaciones ya mencionadas fué tan respetado el distinguido desaparecido por su competencia científica y por su muy reconocida intensa labor organizadora, su empuje en ambas facultades culminó preferentemente en bien de la más saliente de las sociedades argentinas: la Sociedad Científica Argentina. En ella, «ya como presidente, nos dice el ilustre Añón Suárez, o como miembro en sus comisiones directivas, en diez períodos anuales, ya como director o redactor de los *Anales*, estuvo íntimamente ligado al gobierno y actividades de la Sociedad Científica Argentina durante el último cuarto de siglo ».

Su constante empeño fué siempre en el sentido de despertar y desarrollar sus actividades, combatiendo, decía, el raro marasmo de que se hallaba afectada la Sociedad.

En unión del señor doctor Lozano consiguió del Ayuntamiento de Buenos Aires la donación de un espléndido terreno en la Avenida

Santa Fe para levantar en él el soberbio edificio, proyecto del arquitecto Schoo Lastra, y del gobierno la suma de cien mil pesos para iniciar la construcción.

Tuvo la dirección de los *Anales* durante 8 años, habiendo sido anteriormente redactor 4 años más. Diez y seis tomos de los *Anales* estuvieron a su cuidado, y en todos aparecen numerosas noticias bibliográficas que ponen de manifiesto una gran labor y las facultades de carácter que le distinguieron.

Representó a la Sociedad en los 7° y 8° congresos internacionales de navegación, de 1898 y 1900, en Italia ; en el Orientalista de 1899, reunido en Roma ; en el de Ciencias históricas. reunido en la ciudad citada, en 1901 ; en el Latinoamericano, efectuado en Chile, en 1908-1909 ; en el Internacional americano, de 1910, etc.

Ante ese Congreso presentó, en colaboración con el ingeniero español Torres Quevedo, el proyecto para la creación de la Unión internacional de bibliografía y tecnología científica, a fin de reunir, catalogar y fomentar publicaciones científicas en castellano y de cuidar, mantener y perfeccionar el tecnicismo de las ciencias. El Congreso le acogió con aplauso.

Los congresos científicos y de ingeniería celebrados en su país acogieron siempre entre sus representates al distinguido señor Barabino. En éstos, en los extranjeros, en los *Anales* y revistas, y en general en todas partes, predicó constantemente la necesidad de hacer publicaciones de la labor científica en común, de la producción intelectual colectiva ; de allí que considerara fundamental para la vida intelectual la prosperidad de las sociedades, siempre que constituyeran el hogar de los asociados, a fin de aunar energías en bien de la patria.

Es extensa la lista de los estudios que produjo sobre hidrografía, hidráulica, presas, electricidad industrial, ferrocarriles, puertos, saneamiento, materiales de construcción, bibliografía, congresos científicos, historia y lingüística. Respecto a Méjico, escribió acerca del Congreso geológico internacional su trabajo publicado en la *Revista Técnica*, n° 217, del año 1905.

Pocos días después de que el señor ingeniero don Santiago Barabino dejó esta vida transitoria, la Sociedad Científica Argentina, en asamblea extraordinaria y a proposición del señor ingeniero Grieben, resolvió por aclamación incluir el nombre del ilustre desaparecido como socio honorario. Así le tributó justiciero homenaje a sus afanes y a su brillante actuación. Y meses después esta Sociedad mejicana de

geografía y estadística, que vive tan distante de sus hermanas de Sud América, le nombraba, con otras cultísimas personalidades, su miembro honorario.

Tal fué, a grandes rasgos, señores, la vida de uno de los hombres más laboriosos argentinos.

Salón de sesiones, a 12 de marzo de 1925.

Fondation George Montefiore, prix triennal

Article 1. — Un prix dont le montant est constitué par les intérêts accumulés d'un capital de 150.000 francs de rente belge à 3 p. c., est décerné tous les trois ans, à la suite d'un concours international, au meilleur travail original présenté sur l'avancement scientifique et sur les progrès dans les applications techniques de l'électricité dans tous les domaines, à l'exclusion des ouvrages de vulgarisation ou de simple compilation.

Art. 2. — Le prix porte le nom de *Fondation George Montefiore.*

Art. 3. — Sont seuls admis au concours les travaux présentés pendant les trois années qui précèdent la réunion du jury. Ils doivent être rédigés en français ou en anglais et peuvent être imprimés ou manuscrits. Toutefois, les manuscrits doivent être dactylographiés et, dans tous les cas, le jury peut en décider l'impression.

Art. 4. — Le jury est formé de dix ingénieurs électriciens, dont cinq belges et cinq étrangers, sous la présidence du professeur directeur de l'Institut électrotechnique Montefiore, lequel est de droit un des délégués belges.

Sauf les exceptions stipulées par le fondateur, ceux ci ne peuvent être choisis en dehors des porteurs du diplôme de l'Institut électrotechnique Montefiore.

Art. 5. — Par une majorité de quatre cinquièmes dans chacune des deux sections, étrangers et nationaux (lesquels doivent, à cet effet, voter séparément), le prix peut être exceptionnellement divisé

A la même majorité, le jury peut accorder un tiers du disponible, au maximum, pour une découverte capitale, à une personne n'ayant pas pris part au concours ou à un travail qui, sans rentrer complètement dans le programme, montre une idée neuve pouvant avoir des développements importants dans le domaine de l'électricité.

Art. 6. — Dans le cas où le prix n'est pas attribué ou si le juruy n'attribue qu'un prix partiel, toute la somme rendue ainsi disponible est ajoutée au prix de la période triennale suivante.

Art. 7. — Les travaux dactylographiés peuvent être signés ou anonymes. Est réputé anonyme tout travail qui n'est pas revêtu de la signature lisible et de l'adresse complète de l'auteur.

Les travaux anonymes doivent porter une dévise, répétée à l'extérieur d'un pli cacheté joint à l'envoi ; à l'intérieur de ce pli, le nom, le prénom, la signature et le domicile de l'auteur seront écrits lisiblement.

Art. 8. — Tous les travaux, qu'ils soient imprimés ou dactylographiés, sont à produire en douze exemplaires ; ils doivent être adressés franco à M. le secrétaire-archiviste de la *Fondation George Montefiore* à l'hôtel de l'Association, rue Saint-Gilles, 31, Liége (Bélgique).

Le secrétaire-archiviste accuse réception des envois aux auteurs ou expéditeurs qui se sont fait connaître.

Art. 9. — Les travaux dont le jury a décidé l'impression sont publiés au *Bulletin de l'Association des Ingénieurs électriciens sortis de l'Institut électrotechnique Montefiore*. De cette publication ne résulte pour les auteurs ni charge de frais, ni ouverture à leur profit de droits quelconques. Il leur est néanmoins attribué, à titre gracieux, vingt-cinq tirés à part.

Pour cette publication, les textes anglais peuvent être traduits en français par les soins de l'Association.

Concours de 1923 reporté exceptionnellement à 1925

Le montant du prix à décerner est de vingt-deux mille cinq cents francs.

La date extrême pour la réception des travaux à soumettre au jury est fixée au 30 avril 1925.

Les travaux présentés porteront en tête du texte et d'une manière bien apparente la mention : « Travail soumis au concours de la Fondation George Montefiore, session de 1923 (1925) ».

Pour le Conseil d'Administration de l'Association des Ingénieurs électriciens sortis de l'Institut électrotechnique Montefiore :

Le Président,

OMER DE BAST.

Le Secrétaire Général,

L. Calmeau.

Le Cinquième Congrès International de la Route

On anonnce que le Cinquième Congrès International de la Route doit se réunir à Milan, au moi de septembre 1926, sur l'invitation du Gouvernement italien.

Il fera suite aux quatre grands Congrès déjà organisés par l'Association Internationale Permanente des Congrès de la Route, et qui se sont tenus à Paris (1908), Bruxelles (1910), Londres (1913) et Séville (1923).

Les travaux du futur Congrès se dérouleront du 6 au 13 septembre et porteront sur le programme suivant :

Première section : Construction et entretien

Première question : Routes en béton. — Progrès réalisés dans l'emploi dos matériaux utilisés pour la construction des chaussées en béton de ciment.

Deuxième question : Chaussées utilisant le bitume et l'asphalte. — Qualités à exiger des matériaux employés : Liant ; Agrégat.

Troisième question : Standardrisation des épreuves de réception des matériaux pour routes ci-après. — Goudron de houille ; Bitumes et asphaltes.

Deuxième section : Circulation et exploitation

Quatrième question : Récensement de la circulation. — Recherche de bases uniformes et internationales à adopter dans tous les pays.

Cinquième question : Developpement et aménagement des villes dans l'interét de la circulation. — Progrès accomplis dans la réglamentation générale de la circulation dans les villes.

Sixième question : Les routes spéciales réservées aux automobiles. — Quelles sont les conditions qui justifient leur création ?

Autorités compétentes pour décider et contrôler l'éxecution.

Dispositions financières : contribution des budgets publics ; péages. — Règles de circulation et d'exploitation. — Relations à établir entre la route pour automobiles et les autres voies publiques, du point de vue de la sécurité et de la continuité de la circulation générale.

A l'occasion du Congrès aura lieu une *Exposition internationale* ouverte aux constructeurs et producteurs de matériaux et d'outillage concernant la construction et l'entretien des voies publiques ainsi

qu'aux constructeurs de véhicules et d'accessoires intéressant la circulation sur route.

La Commission Italienne d'organisation du Congrès, d'accord avec le Bureau Exécutif de l'Association, a déja jeté les bases de l'emploi du temps, qui comportera des séances de discussion, des visites de routes modernes construites ou en constrution (notamment de l'Autodrome de Monza, où se courra l'un des Grands Prix, et des nouveaux « Autostrado » (routes spéciales pour autos) qui réunissent Milan aux lacs italiens), des visites d'établissements industriels et d'entreprises de voirie, etc.. — La séance de clôture aura lieu à Rome.

Pour tous renseignements, *en particulier pour ce qui concerne l'Exposition*, on peut s'adresser, soit au Secrétariat de la Commission Italienne d'organisation du Cinquième Congrès interternational de la Route, Via Sala 3, Milan (M. l'Ingénieur G. Lori, Secrétaire Général), soit au Secrétariat de l'Association Internationale Permanente des Congrès de la Route, 1, Avenue d'Iéna, à Paris.

En Grande-Bretagne, un Comité spécial dit « Road Congress British Organising Committee », Ministry of Transport, 7 Whitehall Gardens, Londres S. W. I. se charge de toutes les démarches pour les personnnes de nationalité britannique.

Les détails de l'organisation du Congrés et de l'omploi du temps seront publiés ultérieurement, en temps voulu, ainsi que tous renseignements utiles concernant le voyage et le logement.

Newton's Complete Triumph over the Relativists

San Francisco, California, May 10, 1925.

At the California Academy of Sciences today, Captain T. J. J. See, Professor of Mathematics, U. S. Navy, Government astronomer at Mare Island, announced the *final results* of a notable series of discoveries, in a public Address entitled : *Researches in Non-Euclidian Geometry and the theory of relativity.* These two supposed Sciences, he declared, are based on unsuspected deceptions, and therefore it was definitely announced that both Non-Euclidian Geometry and the Theory of relativity are Pseudo-Sciences, without a trace of real foundation in Nature.

Such an announcement in itself perhaps might not be considered remarkable, yet direct demonstrations of the claims advanced were

outlined, and proclamation made of the fact that complete demonstrations already are in the hands of the six greatest and most celebrated academies of science in Europe.

The principal points in professor See's Address ware as follows :

1. For nearly ten years known facts have compelled me to oppose the Theory of relativity and the vague and chimerical doctrines of Non-Euclidian geometry, which were used to support it. In the course of the past two years I have traversed the whole subject in a more exhaustive manner than any other geometer in the world, and during the past six months have put my results in well ordered shape for the most celebrated Academies of science in Europe. At this moment the Royal Society, London, the Academy of sciences, Paris, the Prussian Academy of Sciences, Berlin, the Royal Swedish Academy of Sciences, Stockholm, the Royal Lincean Academy, Rome, and the Royal Society of Sciences, Gottingen, have complete copies of these investigations, entitled : *Researches in Non-Euclidian Geometry and the theory of relativity. A Systematic study of twenty fallacies in the geometry of Riemann. Including the so-called curvature of space and radius of World curvature, and of eighty errors in the physical theories of Einstein and Eddington, Showing the Complete Collapse of the theory of Relativity.*

2. The mere title of this investigation, which is based on the researches of years, shows that while my earlier criticisms of Relativity were *piece-meal*, the present criticisms is *whole-sale* and most exhaustive. It comprises 220 typewritten pages, and is divided into ten chapters, thus :

Chapter I. Ten errors in Riemann's Theory of geometry.

Chapter II. Ten invalid applications of Riemann's Geometry.

Chapter III. Ten errors in Astronomy.

Chapter IV. Ten errors in mechanics.

Chapter V. Ten errors in the Physics of relativity.

Chapter VI. Ten errors in the Relativity Theory of magnetism.

Chapter VII. Ten errors in Natural Philosophy.

Chapter VIII. Ten errors in the Theory of the Aether.

Chapter IX. Ten errors in the Relativity theory of energy.

Chapter X. Ten errors in the theory of forces due to waves.

This outline gives a fair idea of the contents of the exhaustive memoir sent to the Royal society of London, and five similar European academies, and now being studied by these great Learned Societies. For some years the public mind of all countries was misled

by a series of cunning fallacies; yet at last the folly of these sophisms is found out.

3. In 1911 Einstein began the theory of relativity, which resulted from professor Michelson's experiment of 1887; and since 1916 Einstein and Eddington have vastly exploited relativity, and thus spread about such a mass of errors that I had to undertake a catalogue of them, in the hope of saving the scientific world from the plague of endless confusion and bewilderment. The demonstrations developed by me cover the appropriate fields of both Geometry and Physics, and thus the errors announced above are carefully tested out and verified. It is literally true that, in the vast Literature of Relativity there are *eighty errors, but not one physical truth :* In the whole domain of Non-Euclidian Geometry there are *at least 20 errors, but not one Geometrical Truth. Non-Euclidian Geometry is definitely destroyed*, and we are again led back to the foundations of Mathematics, laid by Euclid, 300 B. C., and confirmed by Newton and Euler, Lagrange and Laplace, Fourier and Gauss. In order to ferret out this nest of errors, and destroy them root and branch, it was necessary to cover the fields of both geometry and physics : and the difficulties were so great and the literature was so vast that most investigators hesitated to attempt it, especially as the majority had acquiesced in it without serious study or investigation.

4. The chief errors of the relativists and non-euclidians consisted in such deceptions as the following :

a) The confusion of the *curvature of surfaces in space* with the *curvature of space itself*, which latter does not exist.

b) The unauthorized extension of Gauss' equations for the *double curvature of surfaces* in space to a *manifold of spacetime in four dimensions, — a pure fiction.*

c) The change of the unit in the divisor of the right side of a differential equation, for the square of the line element, from unity to unity plus kappa, this latter involving the curvature of space.

d) We show the falsity of this proceedure *numerically, physically, and by volume*, and thus collapses Riemann's equation of 1854.

e) Along with it falls the work of Christoffel, Ricci, Einstein and Eddington, who havs exploited the false doctrine of the *curvature of space.*

f) The doctrine of the « Radius of World Curvature », which rests on the *fallacy that because a circle on the surface of a sphere returns to itself, therefore space may return to itself.*

g) But with the collapse of *curvature of space,* the *radius of world curvature* also becomes pure fiction; and such a proof is moreover adduced by Lundmark from a series of researches on the universe showing that Roften is *imaginary,* and thus the whole doctrine collapses. *(Monthly Notices,* Roy. Astron. Soc., Oct. 1924, pp. 747-770.)

5. *a)* It is worthy of note that Euclid, 300 B. C., *Elements,* Book XI, prop. 3, defines a straight line by the intersection of two planes which may be inclined at any angle *i*. By generalizing this idea and specifying that i may have any value from zero to 360 degrees, we get a rigorous definition for a straight line, which Lobatschewsky justly considered the first requirement of a valid Geometry.

b) Such a truly straight line, having perfect symmetry on all sides, can never return to itself, because the possibility of curvature is excluded by the *rotational condition* laid down by Lobatschewsky, 1829.

c) Accordingly when the fallacies are removed, through noting that in *dealing with space, we hawe no concern with the theory* of surfaces, — as whether the sum of the angles of a geodesic triangle in a plane, convex or concave surface, are equal to, greater than, or less than two right angles, — we find the foundations of Non-Euclidian geometry undermined.

d) It is therefore useless to discuss the properties of the sum of the angles of triangles in a *plane, on a sphere of pseudo-sphere surface :* these discussions belong to the *theory of surfaces,* not of *space.* The mathematical criteria for surfaces were correctly laid down by Gauss in his celebrated *Memoir on surfaces,* 1827.

e) In denying the curvature of space we found it sufficien to show that if a curvature be imagined about any point p, it is always possible to imagine an equal and opposite curvature about the diametrically opposite point of the celestial sphere *p*, and therefore the double integral for the curvature in respect to all points of the sphere surface vanishes identically.

f) It is remarkable that these simple theorems and many others, pointing out unsuspected sources of error in the assumed properties of space, have not been noted by other mathematiciens : but we find that Riemann's work was not studied by Gauss, nor revised by Riemann himself, 1854-66. Thus the errors arose under peculiar circunstances, and have been overlooked, partly because of Riemann's valuable work in other fields, but especially because of the supposed

approval of Gauss, which in fact never was given, owing to the fact that the papers never were studied by the great Geometer, who was then very old and extremely ailing.

6. It only remains to point out the greatest of all the weaknesses in the theory of relativity and Non-Euclidian geometry: namely the lack of an *Aethereal Medium in Space*, for conveying the forces which govern the orbital motions of the stars, planets, satellites and comets. Without vast *tensions* pulling towards the Sun, the planets would fly the tangent, and the observed order of the solar system be destroyed in a very short time. *The Aether therefore exists, and through the action of waves exerts forces pulling in straight lines for governing the motions of the heavenly bodies.*

It is the glory of the *new theory of the Aether* that it is able to explain this pulling, equivalent to millions of immense cables of the strongest steel, by an *invisible medium*, which for ages escaped the notice of natural philosophers, yet has always been recognized by the greatest of them, — as Huyghens and Newton, Euler and Laplace, Fresnel and Arago, Bessel and Gauss, Sir John Herschel and Lord Kelvin, Maxwell and Poincare, Lodge and Larmor, Newcomb and Michelson.

It follows therefore that the tendency of the Theory of relativity is wrong in every direction. It rests on premises which are *physically false, and mathematically unsound, in that the whole of Non-Euclidian Geometry is based on unsuspected deceptions, such as the curvature of space, radius of World curvature, etc., which have no real existence in Nature, and are not confirmed by the researches of astronomers extending their straight line measurements of the sidereal universe to a depth of several million light-years.*

7. It was one of Einstein's claims that his theory would explain the outstanding motion of Mercury's perihelion, the observed deflection of starlight passing near the Sun in eclipses, and a supposed shift ot the spectral sines towards the Red. He claimed that these three phenomena would establish his law against that of Newton, which he modified for the worse, in violation of recognized scientific principles. Here is the final result of this unauthorized tinkering with the Newtonian law of gravitation.

a) The motion of Mercury's Perihelion is perfectly explained by the law of Newton, as shown by myself, 1920, Grossman of Munich, 1921, and Poor of New York, 1922. There remains no outstanding anomaly whatever in the motion of Mercury's perihelion, — such

motion as exists, having been partly foreseen by Newton himself, in 1686, and finally established by the above cited astronomers 235 years later.

b) A deflection of starlight passing close to the Sun in eclipses amouting to 0,87 second of arc was correctly calculated by Soldner of Munich in 1801, — 110 years before Einstein's paper of 1911. In this latter year Einstein reached a similar result, but in 1916 he erroneously doubled the amount of this Deflection to 1,74, attributing the other half of the calculated bending to curvature of space, which is now shown to be fictitious. In the *Philosophical Magazine* for January, 1923, professor Sir Joseph Larmor of Cambridge, England, first showed that the Soldner value of 0,87 after all is correct. Professor Charles Lane Poor of New York, in the Summer of 1923, independently confirmed the values found by Soldner, 1801, and Larmor, 1923; and in January, 1925, I was able to finish a direct and simple demonstration, showing exactly where Einstein and Eddington had erred in their calculations. By putting the finger right on the errors of Einstein and Eddington, the debate was brought to a close: Einstein's claims were overthrown, forever. My proof of these errors is not only simple and easily understood, but is doubly and trebly strong, incapable of attack from any point.

c) The supposed shift of the solar spectral tines towards the red were mathematically everthrown in 1924 by Professor Wodetsky of Budapest and professor Mohorovicic of Zagreb, Jugo-Slavia: and about the same time observationally rejected by the experienced American Astronomer, professor H. D. Curtis of Pittsburgh.

Accordingly the thres proofs of relativity proposed by Einstein have utterly failed, and not a trace of them survives.

8. It remains to point out that in all the vast literature of relativity no attempt was made to explain magnetism or the associated phenomena of electrodynamics. As far back as 1911 Einstein had failed to find any means of connecting gravitation with magnetic and electrodynamic forces. Belief in this connection, however, had been accepted by the celebrated Faraday, who worked on it experimentally from 1859 to 1866, in the presence of Lord Kelvin and Clerke Maxwell. In 1922, I established what Faraday, Kelvin, Maxwell and Einstein had been unable to find, namely a new mathematical law connecting the magnetism of our globe with terrestrial gravitation, and extended it to the Sun and Moon, so as to account not only for all the leading facts of terrestrial magnetism, but also

for the semidiurnal tide in the magnetism of our globe, which had so puzzled Sir George Airy, Sir John Herschel, and Dr. Humphrey Lloyd, 1870.

This remarkable advance in terrestrial magnetism in all respects the most notable since the celebrated work of Gauss and Humboldt, 1838, was published in the International Journal of Astronomy, the *Astronomishce Nachrichten*, Kiel, Germany, Oct. 22, 1922, and wad made by an extension of Gauss' mathematical researches finished 84 years before. What Faraday attempted experimentally in 1859, I was able to accomplish mathematically in 1922, but I had to work on the new Law connecting magnetism with gravitation eight years, 1914-1922, before I was able to find the mathematical law of Nature and verify it numerically in the magnetism of the globe.

9. And just as relativity fails to account for magnetism and electrodynamic action, so also it fails to account for the wave-theory of light and the aetherial medium in which the waves are conveyed across space. Early in 1919 Einstein aven proposed to do away with the aether, and a formal debate of this kind was held before the Royal Society in London, Nov. 6, 1919: Yet owing to the opposition of the scientific world, it was afterwards hushed up, and since the appearance of the *new theory of the aether*, 1922, completing the *Kinetic theory* begun by Sir Isaac Newton, 1721, we have had no further agitation for doing away with the aether.

For clear dynamical reasons assigned by Newton, Feb. 25, 1692-3, the existence of the Asther is not debatable, except by those whom he calls philosophically incompetent. The aether explains all the phenomena of light, electrodynamics, radio telegraphy, gravity, magnetism, mechanics, and dynamics, and is the basis of our theory of energy. The aether is the world gas, the finest of all media, with corpuscles traveling 294 miles por second, and relative to hydrogen, is about as fine as particles of smoke compared to oranges or grape fruit in a basket. It is no wonder the aether goes through the earth, sun and stars, and enables the waves conveying the music of a concert to be heard in deep mines.

Not only does the *new theory of the aether* explain all the phenomena previously known, but it enables us to predict new phenomena previously unknown, such as the relative shift of the fringes in the split beam of light, after traversing 6000 feet of pipe in opposite directions, in the new experiment at Clearing, near Chicago, recently described by professor Michelson in a public address at the Uni-

versity of Chicago, Jan. 8, 1925. I have made a careful report on Michelson's experiment to the six celebrated European Academies above mentioned, and the triumph is complete, because we have now a correct theory of the rotations in the magnetic field of the earth.

10. In submitting an exhaustive report against *Non-euclidian geometry and the theory of relativity,* to the six leading academies of science in Europe, I was careful to include the Berlin Academy of sciences and the Royal Society of London, with which Einstein and Eddington are connected. These two venerable scientific societies have done great harm to the present age by diffusing a long series of errors which have misled many persons in all lands. Undoubtedly they owe the public some reparation for the mental damage they unfortunately have done. Wili thay have the moral courage to do their duty by standing openly on the side of truth? Or will they morely hope that the long-suffering public will leniently forget their errors and forgive their sins against the natural philosophy of the revered Sir Isaac Newton? Philosophers agree that the theory of universal gravitation, whatever the delinquencies of the Academies of Europe, will continue to stand through the centuries, one thousand of years after another.

I make no prophecy as to the course of these societies, yet as the Paris Academy of Sciences, Oct. 24, 1921, officially proclaimed their adherence to the Mechanics of Newton, it is to be presumed that the others now see that they should de likewise, and lament the folly they were led into, by championing Einstein against the great Newton. And therefore if these academies, after the errors are clearly shown, merely preserve a discreet silence, stand mute as it were, it will be ample evidence to the public that they dare not attempt a defence of the fallacies they have sided in spreading about. Therefore silence is acquiescense, equivalent to a confession of the end of relativity and of Non-Iuclidian geometry, which means the complete triumph of Newton, who has always had his most unwavering defenders in America.

CAPTAIN THOMAS J. J. SEE.

BIBLIOGRAFÍA

Saneamientos urbanos y rurales en la República Argentina, por el ingeniero EVARISTO ARTAZA, tomo I, fascículo 1, 344 páginas, 72 figuras y 56 cuadros. Imprenta y Casa editora « Coni », 1925.

El ingeniero Evaristo Artaza ha comenzado a publicar, bajo el título de *Saneamientos urbanos y rurales en la República Argentina*, un interesante tratado sobre las instalaciones de provisión de agua y desagüe de cloacas de los centros urbanos de la República que cuentan con estos dos importantes servicios públicos. Este primer fascículo contiene los tres primeros capítulos dedicados a la consideración de los antecedentes y bases de cálculo para proyectar los servicios de saneamiento urbano y el estudio de las fuentes de provisión de agua.

Los antecedentes recogidos por el ingeniero Artaza durante su larga actuación en esta especialidad, le permiten desarrollar los distintos puntos de que trata en el primer fascículo del tomo primero, que hemos recibido, con toda la amplitud de detalles necesaria para deducir conclusiones precisas, que le sirven de base para desarrollar un programa de enseñanza netamente nacional, en la cátedra que dicta en la Facultad de ciencias fisico-matemáticas de la Universidad nacional de La Plata.

La bibliografía científica argentina de higiene pública recibe con esta obra, una colaboración muy importante, que pone de manifiesto el estado de adelanto que hemos alcanzado en esta clase de servicios públicos y la preparación del autor en esta materia.

Comienza el ingeniero Artaza por hacer resaltar la eficacia del funcionamiento de las instalaciones de este género en los más importantes centros urbanos argentinos, comparando la mortalidad antes y después que ellos entraron en servicio y durante las ampliaciones parciales que fué necesario realizar, para seguir el aumento siempre creciente de sus poblaciones. Comprueba la desaparición, en algunos casos, de las enfermedades de origen hídrico, motivadas por una mala provisión de agua; pero hace resaltar el inconveniente que importa para esos mismos centros urbanos la instalación de un servicio de provisión de agua aislado, sin su correspondiente complemento del desagüe de sus aguas servidas, que trae como consecuencia un efecto contraproducente al que se deseaba obtener.

Hace una justa apreciación de la importancia de los servicios de las obras sa-

nitarias, nombre con que comúnmente se designan,. entre nosotros, a esta clase de obras públicas, en lo que a higiene pública se refiere, compartiendo el resultado satisfactorio obtenido hasta la fecha en el mejoramiento de la salud pública en los centros urbanos argentinos, con la eficaz acción desarrollada por los otros medios de saneamiento urbano puestos en acción por las autoridades nacionales o municipales, y define la acción de las obras sanitarias como de higiene preventiva.

Hace una definición del concepto que hoy se tiene de la higiene pública, como un conjunto de actividades que procura por todos los medios el bienestar físico y moral de los habitantes de un centro urbano, para enumerar los muchos servicios públicos que a este fin responden y que son del resorte de la técnica del ingeniero en sus funciones de higienista.

Como resultado de la explotación de las instalaciones en servicio, deduce las bases de cálculo para proyectar nuevos servicios en centros urbanos que aún carecen de ellos, haciendo resaltar las causas o factores que contribuyen a dar mayor importancia a los consumos de agua en las distintas poblaciones, entrando en el detalle de su distribución en todas las aplicaciones que tiene el agua, creadas por las necesidades de la vida colectiva y para satisfacer las exigencias personales de cada uno de sus habitantes.

Establece la relación que resulta entre los volúmenes del agua distribuída y los que se recogen en el desagüe, para proyectar la capacidad de estos últimos, y hace un estudio de los volúmenes de agua caída durante las lluvias, sus intensidades y duración, para sentar las bases de cómo han de ser proyectados los desagües pluviales, a fin de evitar el estancamiento de las aguas dentro del radio urbano y los perjuicios que éstas puedan producir por las inundaciones en las propiedades.

El estudio de las fuentes de provisión de agua utilizadas por las poblaciones argentinas es hecho en esta publicación con todo detalle, para hacer resaltar las ventajas o inconvenientes que cada una de las fuentes elegidas tiene, haciendo notar los elementos de juicio que deben preceder a la elección de una fuente para que ella llene las necesidades locales en una forma amplia. La calidad de las distintas aguas, utilizadas en cada caso, es dada a conocer como resultado de los análisis practicados por las autoridades nacionales o provinciales encargadas de su contralor.

En gráficos, cuadros y mapas, se hace un resumen de la forma cómo se aprovisionan los distintos centros urbanos y la capacidad de cada una de las fuentes utilizadas para el abastecimiento de agua; conjunto que permite formarse una idea clara del estado de adelanto de esta clase de trabajos en el país y de lo mucho que aún falta por hacer en este sentido. Cita las leyes nacionales y provinciales que se refieren a la ejecución de estas obras públicas y explica el concepto de la intervención del estado en su realización y el vasto programa que se proponen desarrollar las autoridades encargadas de la aplicación de esas leyes que justifica la necesidad de preparar elementos técnicos que contribuyan a su ejecución, siendo este el principal objetivo de la obra iniciada.

En el capítulo segundo encontramos una estadística minuciosa relativa a diez ciudades argentinas, elegidas convenientemente ya sea por sus diversas fuentes de provisión de agua, ya por la diversidad de explotacion del servicio y que conduce en forma precisa a la determinación de las variaciones de consumo anual, por estación, mensual, diario y horario.

En el capítulo tercero, ampliamente ilustradas con planoso croquis, se describen y en muchos casos se comentan, con atinadas observaciones, las fuentes de provisión de aguas corrientes en más de cuarenta centros urbanos del país.

Asimismo nos encontramos con frecuencia con análisis y planillas de resumen de las características de nuestras aguas.

En resumen, un libro eminentemente nacional en un asunto en que tan exigua es nuestra bibliografía.

Aplaudimos al ingeniero Artaza por la obra de aliento que ha emprendido; por la forma en que la ha encarado y por este primer fascículo promisor de un tratado completo de higiene pública en su faz técnica.

La obra ha sido impresa con el cuidado que conocemos, por la casa « Coni » y editada por la Facultad de ciencias físicomatemáticas puras y aplicadas; formando parte de la colección de textos y conferencias que viene publicando de tiempo atrás y con la que está enriqueciendo nuestro reducido acerbo de buenos textos de orden científico o técnico.

Septiembre, 1925.

VICENTE AÑÓN SUÁREZ.

Nunquam Otiosus III. Coléoptères, principalement Coccinellides, du British Muséum, por el doctor JUAN BRÈTHES.

Por cuarta vez el gran Museo de Londres acaba de confiar al doctor Juan Brèthes, miembro de nuestra Sociedad, la clasificación de varios coccinélidos sudamericanos que conservan en sus colecciones.

El doctor Juan Brèthes, en este nuevo trabajo, señala 21 formas distintas de coleópteros, entre los cuales, algo más de la mitad, resultan novedosas para la ciencia.

Las nuevas especies son :

1. *Perinorthus pentiliformes* *;
2. *Arrowella ? albilacus;*
3. *Cryptognatha nitidella;*
4. *Cryptognatha Weisei;*
5. *Brachyacantha Arrowi;*
6. *Cleothera Traili;*
7. *Hyperaspis gravabilis;*
8. *Hyperaspis Arrowi;*
9. *Hyperaspis Arrowi Darwini;*
10. *Auladoria Arrowi* *;
11. *Diomus assentator;*
12. *Nephopullus fuegensis.*

Los números 2, 8, 9, 11 y 12 son nuevos para la república Argentina y los números 1 y 10 constituyen géneros nuevos (*).

Añade el doctor Brèthes que búsquedas metódicas aumentarán necesariamente el caudal de cuanto queda por estudiar todavía y esperamos que ese postulado tenga un amplio cumplido.

LA DIRECCIÓN.

Nuevas observaciones sobre las tráqueas de los coleópteros, por el doctor Carlos E. Porter.

Con la mayor satisfacción damos cuenta aquí de un descubrimiento sumamente interesante que ha realizado el doctor Porter, el incansable director de la *Revista chilena de historia natural.* Ese descubrimiento se refiere a la presencia de *pelos traqueales* que se encuentran en varias familias de coleópteros.

Este dato debe llamar tanto más la atención, cuanto que la anatomía de los insectos es hoy asunto tan escudriñado que casi se podría decir que se debiera ser un Ramón y Cajal para hallar nuevos senderos.

Las primeras observaciones del doctor Porter se hicieron sobre Longicornios y a la fecha ese sabio observador puede generalizar la cuestión diciendo que esa estructura traqueal, o la presencia de *pelos traqueales,* es general en la familia de los *Cerambycidae.* Prosiguiendo sus observaciones, Porter ha llevado los estudios a la familia de los *Chrysomelidae :* en ésta también ha podido generalizar sobre la presencia de los pelos traqueales.

No contento con esos felices resultados, los *Lampyridae* han sido también estudiados : existen en éstos los *pelos traqueales.*

A su vez los *Curculionidae :* aquí unas veces los pelos traqueales existen, y otras veces no, pareciendo dominar lo último.

Hasta la fecha, el doctor Porter ha estudiado diez y ocho familias de Coleópteros : fuera de las cuatro familias antedichas, las restantes han dado resultados negativos en cuanto a la presencia de los pelos traqueales.

Aparte de lo novedosa que es la observación, nos complace la insistencia del estudio sobre la mayor cantidad de insectos posible, para no generalizar sino cuando se tiene una estadística numerosa en apoyo de lo que asevera.

Juan Brèthes.

INVESTIGACIONES MODERNAS

SOBRE

GEOMETRÍA COMPLEJA EN EL PLANO REAL

POR EL Dr FRANCISCO PINGSDORF
Profesor titular de la Universidad nacional del litoral

PRIMERA PARTE

Elementos geométricos

1. LOS ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA

Si el geómetra se empeña en enunciar todos los teoremas de la geometría con entera exactitud, basándose únicamente en los elementos propios y reales, a cada instante se ve obligado a formular excepciones. Este procedimiento impuesto por el rigor matemático contrasta sensiblemente con la elegancia con la cual se enuncian los teoremas del análisis. La rama proyectiva de la geometría, que entre las otras se destaca por el alto grado de rigor y sencillez a la vez de sus teoremas, lo debe en gran parte al hecho de haber agregado a los puntos propios de cada recta del espacio un punto impropio, que a la vez representa su dirección, y fijando la condición que la totalidad de los puntos impropios del espacio observe la misma conducta, como si formasen un plano: el plano impropio del espacio, que por cualquier plano propio es cortado en una recta impropia.

Al estudiar las relaciones entre una recta y una curva de segundo grado se presentan tres casos, a saber: la recta es cuerda o tangente a la curva o no corta a la curva, resultado que puede enunciarse también en la forma: una recta tiene con una curva de segundo gra-

do dos puntos de intersección o un solo punto o ningún punto. Más complicadas todavía se presentan las relaciones entre dos curvas de segundo grado. Obtenemos el resultado que estas curvas tienen cuatro puntos de intersección o dos puntos o ningún punto; además en los dos últimos casos pueden tocarse todavía en un punto y aún falta mencionar el caso excepcional que dos círculos no pueden tener más que dos puntos de intersección.

En la geometría analítica estos mismos casos son caracterizados por la naturaleza de las raíces de las ecuaciones de segundo o cuarto grado respectivamente, que dan las coordenadas de los puntos comunes de las curvas en cuestión; dichas raíces pueden ser reales y distintas, reales y confundidas, o imaginarias conjugadas, y esta observación nos indica el camino que tenemos que seguir para poder enunciar estas relaciones en forma correcta y cómoda a la vez. *Definimos puntos imaginarios como representantes geométricos de las coordenadas imaginarias.* Operando con estos nuevos puntos en la misma forma como con los puntos reales llegamos a los teoremas sencillos y, sin embargo, perfectamente correctos: una recta corta una curva de segundo grado en dos puntos y dos curvas de segundo grado se cortan en cuatro puntos.

Por otra parte, no se puede negar que esta ganancia le cuesta algo caro al geómetra. Si él tiene la ambición de construir una ciencia lógicamente perfecta sin dejar vacíos, forzosamente tiene que estudiar las propiedades de estos nuevos elementos, un estudio que se complica y dificulta por una exigencia, muy natural en geometría, la de encontrar una manera de representar « geométricamente », es decir, mediante el dibujo, estos elementos que no tienen existencia real.

Hace un siglo los matemáticos han empezado a ocuparse de la resolución de este problema y se han publicado una serie de interesantísimas investigaciones al respecto. Naturalmente no puede ser nuestra tarea dar un resumen de los resultados de todas estas investigaciones, si no nos concretaremos a considerar las propiedades fundamentales de puntos y rectas imaginarios, para que un lector que se haya interesado en esta materia, quede habilitado para estudiar una de las obras originales.

Para mayor claridad y para no tener después la necesidad de interrumpir las deducciones, trataremos en los párrafos 2 y 3 algunos tópicos sobre números complejos y ecuaciones de primer y segundo grado, en una forma que más tarde será de mucho provecho para nosotros.

2. NÚMEROS COMPLEJOS

Una explicación puramente aritmética de los números complejos, que con seguridad evita el uso de ideas y conceptos ajenos, es la ideada por W. R. Hamilton [1], considerando *un par de números* en lugar de un número solo, y definiendo convenientemente las operaciones de sumar y multiplicar para estos pares. Si la segunda componente del par tiene el valor especial cero resulta un número real:

$$a = (a, 0).$$

Para poder operar con estos pares de números necesitamos un criterio de la igualdad: definimos que dos pares (a, α) y (a', α') son iguales sólo en el caso que $a = a'$ y $\alpha = \alpha'$.

Además, *definimos la suma* de dos pares de números por la relación siguiente;

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta). \tag{1}$$

Mientras que la especialización de esta fórmula para el caso de que uno de los pares sea un número real es evidente, no sucede así con la multiplicación, que por consiguiente debe definirse separadamente para los dos casos: *Definimos la multiplicación de un número complejo por un número real* $m = (m, 0)$ por la siguiente fórmula:

$$m \,.\, (a, \alpha) = (a, \alpha) \,.\, m = (m \,.\, a, m \,.\, \alpha). \tag{2}$$

Esta fórmula demuestra que cada par de números puede formarse a base de dos pares independientes, que se llaman *unidades*, en la siguiente forma:

$$(a, \alpha) = a \,.\, (1, 0) + \alpha (0, 1). \tag{3}$$

El primero de los pares nuevos es la ya conocida unidad real $(1, 0) = 1$, mientras que el segundo es una nueva unidad, que se llama «imaginaria»: $(0, 1) = i$. Por lo tanto, cada par de números, es decir, cada número complejo puede escribirse en la forma:

$$(a, \alpha) = a + i\alpha. \tag{4}$$

[1] *Dubl. Trans.*, 17 (1837), página 393. Véase también el artículo de Study, en *Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften* (Teubner), I. A. 4.

Definimos ahora la multiplicación de dos números complejos (a, α) y (b, β) mediante la siguiente relación:

$$(a, \alpha) . (b, \beta) = (ab - \alpha\beta, a\beta + b\alpha), \tag{5}$$

la que por medio de la unidad imaginaria puede escribirse también en la forma:

$$(a + i\alpha) . (b + i\beta) = ab - \alpha\beta + i(a\beta + b\alpha). \tag{6}$$

La multiplicacion de los pares de números, a pesar de lo artificial que se presenta a primera vista su definición, sigue completamente las mismas leyes que la multiplicación de los números reales. Si abreviadamente significan A, B, C tres pares de números, fácilmente pueden comprobarse las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (A . B) . C &= A . (B . C) && \text{(ley asociativa)}, \\ A . (B + C) &= A . B + A . C && \text{(ley distributiva)}, \\ A . B &= B . A && \text{(ley conmutativa)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Mediante la fórmula (5) podemos deducir dos relaciones importantísimas:

$$(1, 0) . (0, 1) = (0 - 0, 1 + 0) = (0,1)$$
$$(0, 1) . (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1,0),$$

o, introduciendo la unidad imaginaria i:

$$1 . i = i, \qquad i . i = i^2 = -1. \tag{8}$$

Ya sabemos que un número complejo representado por un par cuya segunda componente es igual a cero, se llama real; si la primera componente es igual a cero, entonces el número complejo se llama *imaginario*. Por lo tanto, la palabra *complejo significa real o imaginario, mientras imaginario significa no real.*

Estrechamente vinculado con un número complejo $a + i\alpha$ es el número $a - i\alpha$, que se llama número « conjugado ». Igualando dos números conjugados se anula la segunda componente, resultando, por lo tanto, un número real. En lo sucesivo nosotros definiremos los números reales mediante los conjugados en la forma siguiente, que para nosotros será muy cómoda: *un número es real cuando coincide con su conjugado.*

3. SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES Y LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Como es sabido, en la geometria analítica las relaciones geométricas entre los elementos se expresan mediante ecuaciones entre las coordenadas de estos elementos. Por consiguiente, para obtener estas relaciones es indispensable una discusión exacta y completa de estas ecuaciones, exigencia que, en la mayor parte de los textos de esta materia, aún no está satisfecha. De mucha importancia para nosotros será el sistema de dos ecuaciones no homogéneas y la ecuación cuadrática.

Consideremos el sistema formado por las dos ecuaciones lineales:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Al resolver este sistema tenemos que distinguir *cinco casos:*

1° El determinante de los coeficientes es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} = (ab) \neq 0.$$

En este caso hay una sola solución, que puede escribirse en la forma simétrica:

$$x : y : 1 = (bc) : (ca) : (ab);$$

2° $(ab) = 0$, $(bc) \neq 0$, $(ca) \neq 0$; no hay ninguna solución;

3° $(ab) = (bc) = (ca) = 0$, pero no se anulan a la vez todos los coeficientes de x e y. En este caso una de las dos ecuaciones es una identidad o es equivalente a la otra. Hay ∞^1 soluciones, que por medio de un parámetro pueden representarse de la manera siguiente:

Sea

$$a_ix + b_iy + c_i = 0$$

aquella de las dos ecuaciones que *no* es una identidad. A ella agregamos una ecuación auxiliar:

$$-b_ix + a_iy + c_iT = 0,$$

siendo T un parámetro.

Según (1) la solucion de este sistema es:

$$x : y : 1 = (-a_ic_i + b_iT) : (-c_ib_i - a_iT) : (a_i^2 + b_i^2).$$

Tratándose de coeficientes reales esta solución resuelve el sistema, pero, admitiéndose también coeficientes imaginarios, puede suceder el caso : $a^2_i + b^2_i = 0$. En este caso, que en lo sucesivo será de mucha importancia para nosotros, agregamos la ecuación auxiliar siguiente :

$$- a_i x + b_i y + t = 0.$$

La solución de este sistema es :

$$x : y : 1 = b_i . (t - c_i) : - a_i . (t + c_i) : 2a_i b_i ;$$

4° $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, pero por lo menos uno de los c_1 o c_2 diferente de cero. En este caso no hay solución;

5° Todos los coeficientes son iguales a cero. En este caso cualquier valor de x y cualquier valor de y satisfacen la ecuación : hay ∞^2 soluciones. Consideremos ahora la *ecuación cuadrática* en x :

$$a . x^2 + 2b . x + c = 0,$$

las raíces de esta ecuación pueden representarse mediante una de las formas :

$$x = \left(- b + \sqrt{b^2 - ac}\right) : a \qquad x = c : \left(- b - \sqrt{b^2 - ac}\right).$$

Tomando en las dos fórmulas la raíz cuadrada con el mismo signo resulta la misma solución de la ecuación. Se recomienda el uso de la segundo forma si a es pequeño. También en este caso hay que distinguir entre cinco probabilidades :

1ª $b^2 - ac \neq 0$, $a \neq 0$. Hay dos soluciones distintas;

2ª $b^2 - ac \neq 0$, $a = 0$. En este caso es forzosamente $b \neq 0$, y la ecuación restante : $2b . x + c = 0$ tiene siempre la solución $x = - c : 2b$. Por lo tanto hay *una sola solución ;*

3ª $b^2 - ac = 0$, $a \neq 0$. Se dice que la solución $x = - b : a$ es una solución confundida, que en realidad representa dos ;

4ª $b^2 - ac = 0$, $a = 0$, $c \neq 0$. Entonces también debe ser $b = 0$. No hay *ninguna* solución ;

5ª $a = b = c = 0$. Cada valor de x satisface la ecuación. Hay ∞^1 soluciones. En la geometría analítica la resolución del problema : determinar los puntos de intersección de una recta con una curva de segundo grado o con una superficie de segundo grado, nos lleva a una ecuación cuadrática, y entonces los casos arriba mencionados encuentran fácilmente su interpretación geométrica. También el quinto caso en el cual, aparentemente, ya no se puede hablar más de una ecuación, se encuentra verificado sobre las superficies regladas.

4. LA GEOMETRÍA ABSTRACTA

Para introducir cómodamente los elementos imaginarios, la geometría común, que también se llama concreta, no presta los mismos servicios que otra clase de geometría que se llama *abstracta*. Sin entrar en detalles, la diferencia entre estas dos clases de geometría puede explicarse de la manera siguiente.

En la geometría concreta un punto *se representa* por un sistema ordenado de números que se llaman sus coordenadas. Además, una línea recta está *representada* por una ecuación lineal entre las coordenadas, en la cual por lo menos uno de los coeficientes de las coordenadas debe ser diferente de cero.

La geometría *abstracta* sigue el camino inverso: ella *define* los puntos y las rectas del plano de la manera siguiente: *Un sistema ordenado de dos números es un punto. Una ecuación lineal de dos variables, en la cual no se anulen a la vez todos los coeficientes de las variables* es *una recta.* Saliendo de este modo de una base puramente abstracta, esta geometría tiene la obligación de camprobar siempre su armonía con el espacio de la experiencia. Pero, por otra parte, tiene una gran ventaja: como el uso de números imaginarios ya no encuentra más objeción, en estas mismas definiciones ya están incluídos los elementos imaginarios, cuya introducción en calidad de entes equivalentes a los reales se ha hecho por lo tanto automáticamente.

A base de esta explicación, las definiciones que figuran en los párrafos que vienen ya no encontrarán dificultades.

5. EL PUNTO

Definición: *Un sistema ordenado de dos números complejos es un punto complejo del plano.*

Este punto sólo es real si coincide con su conjugado. Podemos expresar esto también en la forma: un punto es real si cada una de sus coordenadas es real. Así, por ejemplo, son imaginarios las puntos siguientes: $(3, 2i)$, $(5i, -2)$, $(3-4i, -6i)$, $(3+8i, 2-i)$, $(3-8i, 2+i)$. Los últimos dos puntos, además, son conjugados. En lo sucesivo escribiremos abreviadamente el punto conjugado al punto (x, y) en la forma $(\bar{x}, \bar{y})$.

6. LA RECTA

Definición : *La totalidad de los puntos* (x, y), *cuyas coordenadas satisfacen una ecuación lineal* $ax + by + c = 0$, *en la cual por lo menos uno de los coeficientes* a *o* b *es diferente de cero, es una recta. Los coeficientes pueden ser imaginarios.*

Los puntos conjugados a los puntos de una recta forman otra recta, la *recta conjugada* a la primera. Y ahora se nos ofrece un criterio sencillo para determinar si una recta es real o imaginaria : *una recta es real si coincide con su conjugada.*

Equivalente a esta definición de una recta real es la siguiente, cuya aplicación en la práctica resulta más cómoda :

Definición : *La recta* $ax + by + c = 0$ *es imaginaria, si por lo menos uno de los cocientes* $a : b : c$ *es imaginario.*

Si los tres cocientes resultan reales la recta es real, porque entonces coincide con la conjugada. De este modo una recta puede ser real aun en el caso de que ninguno de los coeficientes de su ecuación sea real. Los ejemplos que siguen sirven para ilustrar mejor las definiciones. Son imaginarios, por ejemplo, las siguientes rectas : $3x - (2 - i)y + 5i = 0$, $2ix + 3y - 7 = 0$, $5ix - 3iy + 2 = 0$, $ix - y = 0$, $x + y - 3 - 4i = 0$, $(2 - i)x + 3iy - 7i + 9 = 0$.
Reales son las rectas : $ix - 5iy = 0$, $(2 + 3i)x - (6 + 9i)y + 10 + 15i = 0$.

Recordando la definición que un punto es real si coincide con su conjugado, podemos enunciar directamente un teorema importante :

Teorema : Sobre una recta imaginaria no puede haber más que un solo punto real. Este punto, naturalmente, es el punto de intersección de la recta imaginaria con la conjugada. El caso en que la recta es paralela a la conjugada será tratado más tarde. Sobre la recta real caben infinidad de puntos imaginarios, y como cada uno depende de dos parámetros, debemos decir, correctamente, que sobre la recta real hay ∞^2 puntos imaginarios. Agregamos aquí mismo una definición que más tarde será muy útil :

La recta $ax + by + c = 0$ *se llama « isótropa » si es :* $a^2 + b^2 = 0$. Todas las otras rectas se llaman « anisótropas » o euclidianas. Las rectas isótropas forman una clase especial de las rectas imaginarias y a pesar de esto son de una importancia trascendental para toda la geometría. En varias ocasiones tendremos que ocuparnos detallada-

mente con ellas. Por sù sola definición ya podemos deducir una propiedad de estas rectas isótropas. Dividiendo la ecuación de una recta $ax + by + c = 0$ por $\sqrt{a^2 - b^2}$, resulta la llamada *forma normal* de la recta. Siendo en este caso $a^2 - b^2 = 0$ esta división es imposible; por lo tanto: *las rectas isótropas son las únicas cuya ecuación no puede obtenerse en la forma normal.*

7. RELACIONES ENTRE RECTAS Y PUNTOS

Para encontrar otras particularidades de los elementos imaginarios vamos a estudiar brevemente las relaciones entre puntos y rectas, que pueden suministrarnos propiedades nuevas en este sentido. Es sabido, por los elementos de la geometría analítica, que la recta que une los dos puntos (x_1y_1) y (x_2y_2) tiene la forma siguiente: .

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \equiv x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Apliquemos esta fórmula para determinar la naturaleza de la recta, que une dos puntos conjugados:

$$x_1 = a + \alpha i, \qquad y_1 = b + \beta i; \qquad x_2 = a - \alpha i, \qquad y_2 = b - \beta i.$$

La ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + \alpha i & b + \beta i & 1 \\ a - \alpha i & b - \beta i & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Según los elementos de la teoría de los determinantes, este determinante puede escribirse en la forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} 2i = 0.$$

Es decir: *la recta que une dos puntos conjugados es real.* Por consiguiente: por cada punto imaginario pasa una recta real, la que le une

con su conjugado. Comprobemos, ahora, que esta recta es la única real que puede pasar por este punto. Para este objeto consideremos dos rectas:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

En la resolución de este sistema nos interesan los primeros tres de los cinco casos enunciados en (3).

1° $(ab) \neq 0$. Las rectas determinan un punto de intersección (xy) dado por:

$$x : y : 1 = (bc) : (ca) : (ab);$$

2° $(ab) = 0$, $(bc) \neq 0$, $(ca) \neq 0$. Las rectas son paralelas;

3° $(ab) = (bc) = (ca) = 0$. Las rectas se confunden en una sola, cuyos puntos pueden representarse mediante un parámetro T o t en la forma:

$$x : y : 1 = (-ac + bT) : (-cb - aT) : (a^2 + b^2) \qquad \text{(anisótropa)}$$

o

$$x : y : 1 = b(t - c) : -a(t + c) : 2ab \qquad \text{(isótropa).}$$

Vemos, por consiguiente, que el punto de intersección de dos rectas reales siempre es real. Con esto queda comprobado que por un punto imaginario nunca puede pasar más que una recta real, porque de otro modo debería ser real ese punto, por ser intersección de dos rectas reales. Podemos, por lo tanto, enunciar ahora el teorema: *por cada punto imaginario pasa una sola recta real, la que lo une con el punto conjugado.*

Para determinar la única recta real por un punto imaginario (xy) tenemos que buscar la recta que pasa por los dos puntos (xy) y $(\bar{x}\bar{y})$ y cuya ecuación es:

$$i(y - \bar{y})x + i(\bar{x} - x)y + i(x\bar{y} - \bar{x}y) = 0.$$

Ejemplo. — Determinar la recta real por el punto $(3, 2 + i)$.

Poniendo:

$$x = 3, \qquad y = 2 + i, \qquad \bar{x} = 3, \qquad \bar{y} = 2 - i,$$

la ecuación se transforma en:

$$i(2i)x + i(0)y + i(-6i) = 0,$$

o en forma más sencilla :

$$x - 3 = 0.$$

Para determinar la recta real por el punto (ii) ponemos :

$$x = y = i, \qquad x = y = -i.$$

y resulta fácilmente :

$$x - y = 0.$$

Interpretando en la ecuación de la recta real por dos puntos conjugados las coordenadas de los puntos como *coordenadas de rectas conjugadas*, resulta otra vez el ya conocido teorema, que tales rectas tienen un *punto de intersección real*, que, por otra parte, es el único punto real sobre una recta imaginaria. Por lo tanto, el punto real de una recta imaginaria $ax + by + c = 0$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones :

$$ax + by + c = 0,$$
$$\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0,$$

que da las coordenadas del punto real buscado en la forma :

$$x : y : 1 = i(b\bar{c} - \bar{b}c) : i(c\bar{a} - \bar{c}a) : i(a\bar{b} - \bar{a}b).$$

Mediante los factores i las coordenadas se obtienen directamente en *forma real*.

Ejemplo. — Determinar el punto real sobre la recta $x + 2iy - 4i = 0$. Resolvemos el sistema :

$$x + 2iy - 4i = 0$$
$$x - 2iy + 4i = 0$$
$$x : y : 1 = i(0) : i(-8i) : i(-4i)$$
$$x = 0, \qquad y = 2.$$

8. RECTA IMAGINARIA DE DIRECCIÓN REAL

La determinación del punto real sobre una recta imaginaria resulta imposible si la recta es paralela a la conjugada. En este caso, el punto real es un punto *impropio*, y por ser el punto impropio de una recta el representante de su dirección, la recta imaginaria, cuyo único punto real es su punto impropio, se llama « *recta imaginaria de dirección real* ».

¿ Cuál es ahora el criterio analítico, para que la recta imaginaria $ax + by + c = 0$ sea de dirección real ? Evidentemente debe ser:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0,$$

o escribiendo los coeficientes de x e y en la forma amplia: $a + \alpha i$, $b + \beta i$

$$\begin{vmatrix} a + \alpha i & b + \beta i \\ a - \alpha i & b - \beta i \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene la relación sencilla:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Para mejor ilustración menciono algunas rectas de dirección real: $3v - 5y + 6i = 0$, $5ix + 4iy - 2 + 8i = 0$, $(2 - 3i)x + (6 - 9i)y - 5i = 0$.

Equivalente a la definición de recta imaginaria de dirección real, que hemos dado más arriba, es la siguiente: la recta imaginaria $ax + by + c = 0$ se llama de dirección real si el cociente $a : b$ es real.

9. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Ahora ya no ofrece ninguna dificultad la solución del problema: determinar la recta que pasa por un punto dado y que sea paralela o perpendicular a otra recta dada, también en el caso de tratarse de elementos imaginarios. De los elementos de la geometría analítica sabemos que las paralelas o perpendiculares a una recta (a) son dados por las fórmulas (b) y (c) respectivamente:

$$ax + by + c = 0 \qquad (a)$$

$$ax + by + t = 0 \qquad (b)$$

$$bx - ay + \mathrm{T} = 0 \qquad (c)$$

donde t y T son parámetros susceptibles de todos los valores menos $t = c$, porque rectas confundidas *no* se consideran paralelas. Si a las paralelas o perpendiculares se impone la condición de pasar por un punto fijo $(x_0 y_0)$, entonces a los parámetros hay que atribuirles los valores especiales $t_0 = -(ax_0 + by_0)$, $\mathrm{T}_0 = -(bx_0 - ay_0)$.

Ejemplos. — Determinar la paralela y la perpendicular que por el punto imaginario (i, i) pueden trazarse a la recta imaginaria $3x - 5iy - 8 = 0$.

Los valores de los parámetros son, en este caso: $t_0 = -5 - 3i$, $T_0 = 5 - 3i$. Por lo tanto, la paralela y la perpendicular son dadas por las ecuaciones respectivas:

$$3x - 5iy - 5 - 3i = 0 \qquad \text{(paralela)}$$
$$5ix + 3y + 5 - 3i = 0 \qquad \text{(perpendicular).}$$

Determinar la paralela por el punto imaginario $(2 - i, 3)$ a la recta real $4x - 5y + 6 = 0$. Se obtiene fácilmente $t_0 = 7 + 4i$ y, por lo tanto, la ecuación de la paralela

$$4x - 5y + 7 + 4i = 0$$

(recta imaginaria de dirección real).

10. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

El problema: determinar la distancia entre dos puntos nos demuestra una diferencia muy notable entre las dos clases de rectas, que ya conocemos, a saber: las rectas anisótropas y las isótropas. De los elementos de la geometría analítica sacamos la siguiente fórmula para el cuadrado de la distancia D entre dos puntos distintos (x_1y_1) y (x_2y_2):

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

En el párrafo 3 hemos deducido una representación de todos los puntos de una recta anisótropa e isótropa mediante dos parámetros T y t respectivamente en la siguiente forma:

$$x : y : 1 = (-ac + bT) : (-cb - aT) : (a^2 + b^2),$$
$$x : y : 1 = b(t - c) : -a(t + c) : 2ab.$$

Sobre cada una de estas rectas fijamos ahora dos puntos (x_1y_1) y (x_2y_2) por los respectivos valores de los parámetros T_1, T_2 y t_1, t_2. Tratamos primeramente el caso de la recta *anisótropa*:

$$x_1 = (-ac + bT_1) : (a^2 + b^2) \qquad y_1 = (-cb - aT_1) : (a^2 + b^2)$$
$$x_2 = (-ac + bT_2) : (a^2 + b^2) \qquad y_2 = (-cb - aT_2) : (a^2 + b^2)$$
$$x_1 - x_2 = b(T_1 - T_2) : (a^2 + b^2) \qquad y_1 - y_2 = a(T_2 - T_1) : (a^2 + b^2)$$
$$D^2 = (T_2 - T_1)^2 : (a^2 + b^2).$$

Para puntos distintos es siempre $T_1 - T_2 \neq 0$ y además para una recta anisótropa $(a^2 + b^2) \neq 0$. Por consiguiente hemos comprobado el teorema : *la distancia entre dos puntos distintos de una anisótropa es siempre diferente de cero.*

Consideremos ahora el caso de dos puntos distintos sobre una *isótropa :*

$$x_1 = (t_1 - c) : 2a \qquad y_1 = -(t_1 + c) : 2b$$

$$x_2 = (t_2 - c) : 2a \qquad y_2 = -(t_2 + c) : 2b$$

$$x_1 - x_2 = (t_1 - t_2) : 2a \qquad y_1 - y_2 = (t_2 - t_1) : 2b$$

$$D^2 = (t_2 - t_1)^2 . (a^2 + b^2) : 4a^2b^2.$$

La recta isótropa es caracterizada por la relación $a^2 + b^2 = 0$. Por consiguiente obtenemos el resultado :

La distancia entre dos puntos distintos de una isótropa es siempre igual a cero. Por este motivo las rectas isótropas también llevan el nombre de *rectas minimales* lo que no es correcto porque en el campo imaginario el concepto del *mínimum* no está definido.

11. CÍRCULO IRREDUCTIBLE Y REDUCTIBLE

La totalidad de los puntos para los cuales el cuadrado de la distancia a un punto fijo (p, q) es igual a r^2, se llama círculo de centro (p, q) y de cuadrado del radio r^2. Abreviadamente se escribe en la forma: $(p, q; r^2)$. Por lo tanto, *definimos* este círculo por la fórmula :

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0. \qquad (1)$$

Mediante esta fórmula el círculo está definido ahora para cualquier valor *complejo* de las coordenadas y del radio. Hay que tener presente que nuestra definición es la de mayor alcance también en el campo real que la definición común. Porque, evidentemente, en el campo complejo también son considerados *reales* los dos círculos siguientes :

$$(2 - i) . (x^2 + y^2) - 4 + 2i = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 9 = 0,$$

a pesar de que en el primer caso la ecuación no es real y que en el segundo caso el círculo no tiene ningún punto real.

Reemplazando en (1) las coordenadas x e y por las coordenadas x_0 e

y_0 de un punto ajeno al círculo, la expresión $(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 - r^2$ representa la *potencia del punto respecto al círculo.* Es positiva la potencia para un punto en el exterior y negativa para un punto en el interior del círculo, anulándose sobre el círculo mismo. Por consiguiente, en el campo real, para el cual vale la definición de la potencia, el círculo divide todos los puntos de su plano en dos grupos, a saber: puntos internos y externos.

Esta relación deja de existir en el campo complejo. Si ampliáramos la definición de la potencia extendiéndola a puntos imaginarios, ésta, en general, resultaría imaginaria; y una vez que admitimos valores imaginarios, tenemos que tener presente que podemos llegar de un número negativo a otro positivo recorriendo una serie de números complejos *sin pasar por el valor cero.* Podemos, por ejemplo, llegar de -4 a $+2$ dando al ángulo φ todos los valores entre 0 y π en la expresión $-1 + 3 \cdot e^{i\varphi}$. Por lo tanto, en el campo *complejo* ya para un círculo real en el sentido común (es decir que contenga ∞^1 puntos reales) no existe más el concepto de punto interno y externo. Y lo mismo ya puede suceder para los puntos *reales* con respecto a un círculo, que es real sólo según la definición ampliada, es decir, sin tener punto real.

En la teoría de las funciones se usa otra expresión para la distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Es la siguiente:

$$D^2 = (x_1 - x_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + (y_1 - y_2)(\bar{y}_1 - \bar{y}_2).$$

Para puntos reales $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, esta expresión equivale a la otra que ya conocemos, de tal modo que su uso es justificado también en geometría. Esta fórmula, además, ofrecería la ventaja que también en el campo complejo, puntos distintos *siempre* tendrían una distancia real y diferente de cero [1]. (Calcúlese, por ejemplo, la distancia de los puntos $(0, 0)$ y $(1, i)$ mediante las dos fórmulas.) Pero, por otra parte, cambiaría mucho las relaciones geométricas, de tal modo que no nos ocupamos más detalladamente con esta fórmula. Menciono el caso siguiente, muy sencillo. El círculo real de centro $(0, 0)$ y de radio 5 tendría a base de esta definición la ecuación

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 25 = 0.$$

[1] Véase, por ejemplo, STUDY, *Kürzeste Wege im complexen Gebiet. Math. Ann.*, 60.

Encuéntranse sobre este círculo los seis puntos siguientes que, además se encuentran sobre la recta $y = 0$, a saber:

$$(\pm 5, 0), \qquad (3 \pm 4i, 0) \qquad \text{y} \qquad (4 \pm 3i, 0).$$

Es decir, una recta podría tener con un círculo más de dos puntos de intersección.

Tenemos que considerar todavía el caso del círculo de *radio cero*, cuya ecuación es por consiguiente:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = 0.$$

Lo interesante es que la ecuación puede representarse en forma de un producto de dos funciones lineales en x e y.

$$[x - p + i(y - q)] \cdot [x - p - i(y - q)] = 0.$$

Por este motivo el círculo de radio cero se llama también « *círculo reductible* » mientras que los otros llevan el nombre de « *irreductibles* ». Hay ∞^3 círculos irreductibles y ∞^2 círculos reductibles en el plano.

Las dos funciones lineales en x e y, de las cuales se compone el círculo reductible, son dos rectas imaginarias de la forma:

$$x + iy = \text{const.}$$
$$x - iy = \text{const.}$$

La suma de los cuadrados de los coeficientes de x e y es $1 + i^2 = 0$. Por lo tanto, estas dos rectas son isótropas, de tal modo que podemos enunciar el teorema:

El círculo reductible consta de las dos isótropas que pasan por su centro. El único punto real que puede tener un círculo reductible es el centro; pero éste también puede ser imaginario y en este caso el círculo no tiene ningún punto real.

La potencia de un punto $(x_0 y_0)$ con respecto a un círculo reductible $(p, q; 0)$ está dada por la fórmula

$$(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2,$$

es decir, es igual al cuadrado de la distancia del punto al centro del círculo.

12. CÍRCULO Y RECTA

Nos proponemos hallar los puntos de intersección de un círculo y una recta, representados ambos por sus ecuaciones :

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0,$$
$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

en las cuales uno de los coeficientes a o b debe ser diferente de cero. Eliminando x obtenemes la siguiente ecuación cuadrática en y, cuya discusión nos hará conocer las relaciones geométricas (véase párrafo 3).

$(a^2 + b^2)\,y^2 + 2\,(bc + abp - a^2q)\,y + (c + ap)^2 + a^2\,(q^2 - r^2) = 0$ (¹) :

1° $(a^2 + b^2)\,r^2 - (ap + bq + c)^2 \neq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Hay dos soluciones diferentes, es decir, *dos puntos de intersección distintos*. La recta es anisótropa. Si el círculo es *reductible*, es $ap + bq + c \neq 0$, es decir, la recta *no* pasa por el centro ;

2° $a^2 + b^2 = 0$, $ap + bq + c \neq 0$. Se trata entonces de los puntos de intersección y de una *isótropa* que no pasa por el centro. En este caso hay una sola solución, es decir, *un solo punto de intersección ;*

3° $(a^2 + b^2)\,r^2 - (ap + bq + c)^2 = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Hay dos soluciones confundidas : la recta anisótropa es tangente al círculo ;

4° $ap + bq + c = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $r^2 \neq 0$. Se trata de la intersección de un círculo irreductible con una isótropa que pasa por su centro. *No hay punto de intersección. La recta es una asíntota ;*

5° $ap + bq + c = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $r^2 = 0$. Intersección de un *círculo reductible con una isótropa que pasa por su centro.* Hay ∞^1 soluciones, es decir, *la recta se encuentra enteramente sobre el círculo.*

Estos resultados pueden enunciarse en la forma siguiente :

Cada recta anisótropa corta el círculo en dos puntos distintos o confundidos. Una recta isótropa corta al círculo en un punto, si no pasa por su centro, y en ningún punto si pasa por el centro ; en este último caso hay ∞^1 puntos de intersección, si el círculo es reductible.

El lector muy fácilmente puede ilustrarse en los diferentes casos resolviendo unos problemas al respecto.

(¹) En cuanto a la discusión de esta ecuación véase : H. BECK, *Koordinatengeometrie*, página 23, Berlín, 1919.

13. LAS RECTAS ISÓTROPAS

En varias ocasiones ya nos hemos encontrado con esta clase especial de rectas imaginarias, que se caracteriza por la relación que la suma de los cuadrados de los coeficientes de x e y es igual a cero. Habíamos definido la recta por la ecuación $ax + by + c = 0$ con la condición de que por lo menos uno de los coeficientes a o b debe ser diferente de cero. En el caso de la recta isótropa se ve directamente que los *dos* coeficientes deben ser diferentes de cero y que deben ser de la forma $n, \pm ni$. Dividiendo todavía por n vemos que las rectas isótropas pueden representarse en dos formas distintas, a saber:

$$i.x + y + c = 0 \qquad \text{(recta isótropa izquierda),}$$
$$x + i.y + c = 0 \qquad \text{(recta isótropa derecha).}$$

Estas dos clases de isótropas observan una conducta distinta, y, por consiguiente, hay que tratarlas separadamente. Existen ∞^1 isótropas izquierdas y ∞^1 isótropas derechas. Considerando ahora dos isótropas de cada clase, caracterizadas por diferentes valores del coeficiente c, a saber:

$$\left.\begin{aligned} i.x + y + c_1 = 0 \\ i.x + y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{isótropas izquierda,}$$
$$\left.\begin{aligned} x + i.y + C_1 = 0 \\ x + i.y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{isótropas derecha,}$$

obtenemos el resultado:

Todas las isótropas de la misma clase son paralelas y ortogonales a la vez; dos isótropas que pertenecen a diferentes clases siempre se cortan.

Este hecho extraño que dos rectas pueden ser paralelas y ortogonales a la vez se explica fácilmente. Sabemos por los elementos de la geometría analítica que las dos rectas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

y

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

forman un ángulo φ definido por la ecuación:

$$\operatorname{tg}.\varphi = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}.$$

Aplicando esta fórmula al caso de dos isótropas de la misma clase, obtenemos directamente la expresión indefinida $\frac{0}{0}$, es decir, queda completamente indeterminado el ángulo formado por dos isótropas de la misma clase. Estudiemos ahora el ángulo entre una isótropa y una recta anisótropa cualquiera:

$$i\,.\,x + y + c_1 = 0 \qquad x + i\,.\,y + c_2 = 0$$
$$ax + by + c = 0 \qquad ax + by + c = 0.$$

Para el ángulo entre las dos rectas obtenemos respectivamente:

$$\text{tg}\,.\,\varphi = \frac{bi - a}{b + ai} = i \qquad \text{tg}\,.\,\varphi = \frac{b - ai}{bi + a} = \frac{1}{i},$$

o también:

$$i\,.\,\text{tg}\,.\,\varphi = -1 \qquad i\,.\,\text{tg}\,.\,\varphi = 1.$$

Tomando en cuenta la conocida relación:

$$i\,.\,\text{tg}\,.\,\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}},$$

podemos escribir la fórmula para el ángulo de la manera siguiente:

$$e^{\pm i\varphi} = 0.$$

Este ángulo no depende de las coordenadas de las rectas, es decir, es constante para todas las rectas, motivo por el cual matemáticos franceses habían dado el nombre de «isótropas» a estas rectas. Es incorrecta también esta denominación porque el ángulo, en realidad resulta indefinido.

El lector no tendrá ahora dificultad para hallar el ángulo entre una isótropa izquierda y otra derecha.

Aplicando la fórmula de la geometría analítica de la recta que pasa por un punto fijo, obtenemos las dos isótropas que pasan por el punto (ξ, η) en la siguiente forma:

$$i\,(x - \xi) + y - \eta = 0 \qquad \text{isótropa izquierda,} \qquad (1)$$
$$x - \xi + i\,(y - \eta) = 0 \qquad \text{isótropa derecha.} \qquad (2)$$

Multipleando estas dos ecuaciones y suprimiendo el factor común i obtenemos:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = 0\,;$$

es decir: *el círculo reductible consta de la isótropa-izquierda y de la isótropa-derecha que pasan por su centro.*

Puntos que se encuentran sobre la misma isótropa se llaman *paralelos*: su distancia es siempre igual a cero. Conviene distinguir entre puntos paralelos izquierdos y paralelos derechos, según el caso de que se encuentren sobre una isótropa izquierda o derecha.

Comprobemos ahora el teorema: *las dos isótropas por un punto* (ξ, η) *cortan cada recta anisótropa, que no pasa por este punto, en dos puntos*, lo que, mediante el concepto de los puntos paralelos, puede expresarse de la manera siguiente: sobre cada recta anisótropa existe un punto que es paralelo izquierdo a un punto ajeno a la recta, y otro punto que es paralelo derecho al mismo punto.

La anisótropa sea:

$$ax + by + c = 0.$$

Las isótropas por (ξ, η) son:

$$i \cdot (x - \xi) + y - \eta = 0 \qquad \text{y} \qquad x - \xi + i\,(y - \eta) = 0,$$

eliminando la coordenada y obtenemos:

$$(a - bi)\,x + c + ib\xi + b\eta = 0, \qquad (ai - b)\,x + ic + b\xi + ib\eta = 0.$$

Eliminando la coordenada x obtenemos:

$$(a - bi)\,y - ia\xi - a\eta - ic = 0, \qquad (ai - b)\,y - a\xi - ai\eta - c = 0.$$

Luego obtenemos las coordenadas $(x_i y_i)$ y $(x_d y_d)$ de los puntos P_i y P_d, que son los puntos paralelos izquierdos y derechos respectivamente al punto $P(\xi, \eta)$:

$$x_i = \frac{-ib\xi - b\eta - c}{a - bi},$$

$$y_i = \frac{ia\xi + a\eta + ic}{a - bi}, \qquad (3)$$

$$x_d = \frac{-b\xi - ib\eta - ic}{ai - b};$$

$$y_d = \frac{a\xi + ia\eta + c}{ai - b}. \qquad (4)$$

Las fórmulas 1 a 4 de este párrafo nos van a prestar servicios muy útiles en la segunda parte de este pequeño trabajo. Ahora resolvamos otro problema mediante las fórmulas 1 y 2, el de determinar un pun-

to que a la vez sea paralelo-izquierdo a un punto $(x_1 y_1)$ y paralelo-derecho a otro punto $(x_2 y_2)$. Este punto debe encontrarse sobre la isótropa-izquierda por $(x_1 y_1)$ y sobre la isótropa-derecha por $(x_2 y_2)$. Por lo tanto, será punto de intersección de las dos rectas:

$$i(x - x_1) + y - y_1 = 0$$
$$x - x_2 + i(y - y_2) = 0.$$

$$x = \frac{1}{2}[x_1 + x_2 - i(y_1 - y_2)] \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}[-i(x_2 - x_1) + y_1 + y_2]$$
$$= \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 - y_2}{2i} \qquad\qquad = \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{x_1 - x_2}{2i}. \tag{5}$$

Para las coordenadas (u, v) del punto que a la vez es paralelo-derecho al punto $x_1 y_1$ y paralelo izquierdo a $x_2 y_2$ obtenemos los valores siguientes:

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{y_1 - y_2}{2i}, \qquad v = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2i}. \tag{6}$$

Más tarde (véase párrafo 19) emplearemos estas fórmulas en el caso de que los puntos $(x_1 y_1)$ y $(x_2 y_2)$ son puntos conjugados, es decir, si es:

$$x_2 = \bar{x}_1 \qquad y_2 = \bar{y}_1.$$

En ese caso obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + \bar{x}_1}{2} + \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i} \qquad u = \frac{x_1 + \bar{x}_1}{2} - \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i}$$
$$y = \frac{y_1 + \bar{y}_1}{2} - \frac{x_1 - \bar{x}_1}{2i} \qquad v = \frac{y_1 + \bar{y}_1}{2} + \frac{x_1 - \bar{x}_1}{2i}. \tag{7}$$

14. TANGENTES ISÓTROPAS A LAS SECCIONES CÓNICAS

Resultados muy interesantes obtenemos al resolver el problema: determinar las tangentes isótropas a las curvas de segundo grado y examinar la figura formada por ellas. Tratemos primeramente el caso de la *elipse*. Si el centro coincide con el centro de coordenadas y su semieje mayor p con el eje X, y si además el semieje menor es q, entonces la ecuación de la elipse puede escribirse en la forma:

$$q^2 x^2 + p^2 y^2 - p^2 q^2 = 0.$$

Cortando la curva con una isótropa-izquierda y otra derecha dadas por

$$x - iy = u, \qquad x + iy = v,$$

obtenemos para las ordenadas y de los puntos de intersección las ecuaciones :

$$y_i = \left(- iuq^2 \pm pq\sqrt{p^2 - q^2 - u^2}\right) : (p^2 - q^2),$$

y, además,

$$y_d = \left(ivq^2 \pm pq\sqrt{p^2 - q^2 - v^2}\right) : (p^2 - q^2).$$

Para que las isótropas sean tangentes debe ser :

$$u = \pm\sqrt{p^2 - q^2} = \pm c, \qquad v = \pm\sqrt{p^2 - q^2} = \pm c.$$

siendo c la excentricidad lineal, es decir, la distancia entre centro y foco. Por lo tanto, hay dos tangentes isótropas-izquierdas y dos tangentes isótropas-derechas, que son las siguientes :

$$I_1 = x - iy - c = 0, \qquad D_1 = x + iy - c = 0,$$
$$I_2 = x - iy + c = 0, \qquad D_2 = x + iy + c = 0.$$

Estas cuatro tangentes isótropas forman un *paralelogramo tangente* cuyos cuatro vértices son los siguientes :

1° Punto de intersección de I_1 con D_1 :

$$x = + c, y = 0;$$

2° Punto de intersección de I_1 con D_2 :

$$x = 0, y = - \frac{c}{i};$$

3° Punto de intersección de I_2 con D_1 :

$$x = 0, y = + \frac{c}{i};$$

4° Punto de intersección de I_2 con D_2 :

$$x = - c, y = 0.$$

Por consiguiente, *dos de los vértices son reales y son los focos de la elipse : los otros dos son imaginarios y se encuentran sobre el semieje menor de la curva,* por la analogía con los focos reales de la curva se llaman *focos imaginarios.*

Secciones cónicas se llaman «confocales», si tienen los mismos focos. Llamando ahora el paralelogramo formado por dos pares de isotropas un «paralelogramo isótropo», llegamos a la siguiente definición sencilla de secciones cónicas confocales: *secciones cónicas son confocales si pueden inscribirse al mismo paralelogramo isótropo del perímetro nulo* (¹).

En el caso de la hipérbola llegamos a los mismos resultados. Trataremos todavía brevemente el caso de la *parábola*.

$$y^2 = 2p \cdot x \qquad p > 0.$$

Cortando la curva con las dos isótropas

$$x - iy = c, \qquad x + iy = c,$$

obtenemos la siguiente ecuación para las ordenadas y de los puntos de intersección:

$$y^2 - 2ip \cdot y - 2pc = 0, \qquad y^2 + 2ip \cdot y - 2pc = 0,$$
$$y_i = ip \pm \sqrt{p(-p + 2c)}, \qquad y_d = -ip \pm \sqrt{p(-p + 2c)}.$$

Para que la isótropa sea tangente en ambos casos debe ser: $c = \frac{p}{2}$.

Por consiguiente, existe una sola isótropa-izquierda y una sola isótropa-derecha que a la vez sean tangentes a la parábola. Sus ecuaciones son:

$$x - iy = p : 2,$$
$$x + iy = p : 2.$$

El *punto de intersección* tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, es decir es el *foco*.

Íntimamente vinculada con la teoría de las rectas isótropas es la de los *puntos cíclicos imaginarios*, es decir, de los puntos de la recta impropia por los cuales pasan todos los círculos del plano. Pero como esta materia está tratada en todos los textos de la geometría proyectiva y analítica, nos concretamos a llamar la atención en un punto, que muchas veces se interpreta erróneamente: *no podemos decir que estos puntos se encuentran en el infinito, porque su distancia a cualquier punto del plano se presenta en la forma indeterminada* $\frac{0}{0}$ *que puede tener un valor cualquiera*. Y tampoco puede ser de otra manera, porque a

(¹) Véase párrafo 15.

estos puntos se les imponen condiciones contradictorias, a saber: encontrarse sobre una recta en el infinito y formar parte de un círculo, es decir, encontrarse a una distancia finita de un punto en el finito. Tal problema, el análisis sólo puede resolverlo en forma indeterminada.

15. EL PARALELOGRAMO DE PERÍMETRO NULO

Queremos estudiar brevemente unas relaciones referentes al paralelogramo de perímetro nulo, que hemos considerado en el párrafo anterior. De sus cuatro vértices, dos consecutivos se encuentran sobre la misma isótropa siendo, por lo tanto, su distancia igual a cero.

Los vértices opuestos *no* son paralelos; *uno de los dos pares puede ser real.* Las diagonales son perpendiculares en su medio [1]. Sean $P_1(x_1 y_1)$ y $P_2(x_2 y_2)$ dos puntos no paralelos: *su centro* es definido como punto de intersección de las diagonales del paralelogramo, en el cual los dos puntos P_1 y P_2 son vértices opuestos y tienen las coordenadas $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Éstas son una función *lineal* de las coordenadas de los extremos, a pesar de que la construcción en el campo real es de segundo grado. En el *campo complejo* también la construcción del centro de dos puntos es *lineal* (mediante las isótropas) de modo tal, que la *contradicción* que en el campo real existe entre la construcción del punto medio de un segmento y su expresión analítica *desaparece en el campo complejo.*

16. LAS COORDENADAS ISÓTROPAS

Las coordenadas cartesianas más generales de un punto del plano las obtenemos trazando por él las paralelas a dos rectas arbitrariamente elegidas, a saber, los ejes de abcisas y de ordenadas. Existen, pues, ∞^4 sistemas de coordenadas cartesianas.

Pero, además, cada plano está cubierto de una red de rectas paralelas de modo tal que no hay necesidad de construir artificialmente tal sistema: son las ∞^2 isótropas, de las cuales siempre dos que no

[1] H. Beck *define* la ortogonalidad de dos rectas por esta relación, llamándolas ortogonales si son diagonales de un paralelogramo de perímetro nulo (*Koordinatengeometrie*, pág. 33).

son de la misma clase determinan un punto complejo. Poniendo, por consiguiente,

$$x - iy = u, \qquad x + iy = v, \qquad (1)$$

los valores u y v pueden considerarse como coordenedas del punto determinado por las dos isótropas $x - iy =$ constante y $x + iy =$ constante. Estas coordenadas u y v se llaman coordenadas *isótropas* del punto complejo P (xy) [1].

Resolviendo las ecuaciones (1) con respecto a x e y obtenemos:

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \qquad y = \frac{1}{2} i (u - v). \qquad (2)$$

Habiéndose establecido de este modo la relación entre las coordenadas cartesianas y las isótropas, es fácil expresar las relaciones geométricas mediante las coordenadas isótropas. Para mejor ilustración anotamos en las líneas que siguen las coordenadas (uv) de algunos puntos, cuyas coordenadas cartesianas figuran en la primera línea. El lector fácilmente comprobará los valores:

(xy) :	$(0, 0)$	$(1, i)$	$(i, 1)$	(i, i)	$(1,1)$	$(0, 1)$
(uv) :	$(0, 0)$	$(2, 0)$	$(0, 2i)$	$(i + 1, i - 1)$	$(1 - i, 1 + i)$	$(-i, +i)$.

Fácilmente se ve que las coordenadas isótropas de puntos *reales* son *complejas-conjugadas,* de tal modo que un punto real ya está determinado por *una* coordenada isótropa. Para estos puntos la coordenada v no es otra cosa que este número complejo, que según Gauss (o también Argand-Wessel) está coordinado a cada punto. Por consiguiente, el conocido método ideado por los nombrados matemáticos de representar geométricamente los números complejos consiste en reemplazar un punto real por la isótropa derecha que por él pasa.

Distancia de dos puntos en coordenadas isótropas. — Sean dados dos puntos $(u_1 v_1)$ y $(u_2 v_2)$. Mediante fórmulas (2) podemos expresar directamente el cuadrado de la distancia de los dos puntos obteniendo fácilmente el resultado:

$$D^2 = (u_1 - u_2) \cdot (v_1 - v_2). \qquad (3)$$

[1] Las coordenadas isótropas han sido estudiadas primeramente por Laguerre y aplicadas después sobre todo por Darboux, pero estas obras no nos eran accesibles. En cuanto a literatura véase la *Encyklopaedie* (Teubner), III, AB7.

El lector avanzado se dará cuenta que la relación entre (xy) y (uv) tiene el carácter de una transformación afín de determinante $2i$, lo que en seguida le dará resultados importantes.

Para la distancia r del punto $(u_1 v_1)$ al punto (00) resulta, por lo tanto:

$$r^2 = u_1 \,.\, v_1. \tag{4}$$

El ángulo que la recta por $(u_1 v_1)$ *y* $(u_2 v_2)$ *forma con el eje* X. — Calculando en la manera elemental el seno y el coseno de este ángulo φ y uniéndolos en la forma

$$\cos \varphi + i \,.\, \mathrm{sen}\, \varphi = e^{i\varphi},$$

obtenemos:

$$e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}}$$

o, elevando al cuadrado

$$e^{2i\varphi} = (u_1 - u_2) : (v_1 - v_2). \tag{5}$$

Círculo. — El círculo, cuyo centro es (p,q) y cuyo radio es r, se presenta en coordenadas isótropas u, v en forma de una ecuación bilineal:

$$uv - (p + qi)\, u - (p - qi)\, v + p^2 + q^2 - r^2 = 0.$$

Por consiguiente, cada ecuación de la forma siguiente representa un círculo:

$$a \,.\, uv + b \,.\, u + c \,.\, v + d = 0, \tag{6}$$

siempre que $a \neq 0$. El círculo de radio 1 y de centro (00) tiene, por consiguiente, la ecuación que puede deducirse de (6) y también de (4):

$$uv - 1 = 0. \tag{7}$$

Es una desventaja de las coordenadas isótropas que las coordenadas de un punto *real* son complejas-conjugadas, es decir, en general, no son reales. Para el estudio de grupos reales las coordenadas cartesianas prestan mejores servicios que las isótropas. Estas últimas, por otra parte, son las más indicadas para tratar la *afinidad circular*. Sean, por ejemplo, (xy) y $(x'y')$ dos puntos que se corresponden en una afinidad circular con respecto al círculo de radio 1 y de centro (00); entonces es en coordenadas cartesianas:

$$x' = x : (x^2 + y^2), \qquad y' = y : (x^2 + y^2),$$

mientras que en coordenadas isótropas un breve cálculo da:

$$u' = 1 : v, \qquad v' = 1 : u.$$

Ya habíamos visto que una de las coordenadas u o v basta para determinar un punto *real*. Sean, viceversa, P_1 y P_2 los dos puntos reales determinados por las coordenadas isótropas (uv) de un punto *imaginario*. Entonces, evidentemente, el sistema *ordenado* de los dos puntos reales $P_1 > P_2$ puede servir de representación geométrica del punto imaginario (uv). Ha sido ésta la idea de Laguerre, pero que pasó completamente inadvertida y que fué encontrada y desarrollada en otra dirección por E. Study, en cuyas investigaciones tenemos que ocuparnos en la segunda parte de este trabajo.

SEGUNDA PARTE

Representación geométrica de los puntos y rectas imaginarios

17. EL MÉTODO DE VON STAUDT

En geometría no debemos conformarnos con haber estudiado las particularidades de los elementos imaginarios; estamos obligados a buscar una manera de representar gráficamente estos nuevos elementos. Desde hace 70 años los matemáticos se han dado cuenta de esta obligación, y desde esta época han sido publicadas muchas obras que se ocupan de este problema.

Los grandes fundadores de la nueva era geométrica, Poncelet y Steiner, no se habían formado todavía una idea clara del imaginario. Sobre todo Steiner lo calificó de « fantasmas », que desde un mundo ajeno perturbara la actitud del geómetra. Para estudiar puntos imaginarios *aislados* se emplearon pronto las llamadas *transformaciones imaginarias,* es decir, transformaciones colineales con coeficientes imaginarios, que transformaban ciertos puntos imaginarios en otros reales. Así, por ejemplo, los puntos *cíclicos imaginarios,* cuya ecuación en coordenadas cartesianas es

$$x^2 + y^2 = 0,$$

pueden transformarse en puntos reales mediante la fórmula :

$$x' = x, \qquad y' = iy.$$

Resulta, entonces,

$$x^2 + y^2 = x'^2 - y'^2 ;$$

es decir, los círculos se transforman en hipérbolas equiláteras y los puntos cíclicos imaginarios en los puntos impropios de sus asíntotas.

También ya era conocido y aplicado el procedimiento de Argand-Wessel-Gauss para representar gráficamente los ∞^1 puntos imaginarios de una recta mediante los ∞^2 puntos reales del plano. Pero este método no admite ampliación. Ya fracasa si queremos representar los ∞^4 puntos imaginarios del plano, porque necesitaríamos un espacio de cuatro dimensiones.

Esta dificultad sólo puede subsanarse coordinando al *punto* imaginario una figura más complicada. El primero que publicó esta idea fué W. Paulus (¹), que representó el punto imaginario por una *involución elíptica;* pero sus publicaciones pasaron inadvertidas, y recién las investigaciones de von Staudt (²), que se basaban sobre la misma interpretación del punto imaginario, llamaron la atención de los matemáticos.

La idea fundamental de von Staudt era la siguiente: cada curva del segundo grado establece en su plano una *afinidad polar,* en la cual a cada punto corresponde una recta, la polar, como lugar geométrico de todos los polos conjugados con respecto a la mencionada curva, y a cada recta un punto, su polo. Si la curva está representada por una ecuación con coeficientes reales, entonces sucede lo mismo con el sistema polar, y este último puede reemplazar la curva definiéndola como lugar geométrico de todos los *puntos que pertenecen a sus polares.* Una recta cualquiera por un punto P_n corta su polar en el punto P'_n y además la curva en dos puntos A y B, de tal modo que para cualquier valor de n las cuaternas $(ABP_nP'_n)$ son armónicas, es decir, cada curva de segundo grado forma sobre cualquier recta del plano una *involución cuyos puntos fundamentales son los puntos de intersección de la curva y la recta.*

La relación involutoria queda real también en el caso de que los puntos fundamentales sean imaginarios; en este caso la involución se llama *elíptica* y está determinada por dos pares de puntos que se *separan.* Su construcción geométrica es muy sencilla (véase fig. 1): Para representar un punto imaginario x_n y su conjugado $\bar{x}_n$ que se encuentran sobre la recta real X, dibujamos dos círculos por los dos puntos reales, que representan dichos puntos imaginarios según el método de Gauss. Los círculos cortan a X en dos pares de puntos separados y

(¹) Paulus, *Grundlinien der neueren, ebenen Geometrie*, Stuttgart, 1853.

(²) von Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1846; *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1856 a 1860.

determinan, por lo tanto, sobre la recta una involución elíptica, que representa el punto imaginario y a la vez su punto conjugado. Para poder distinguir entre los dos, von Staudt *orienta la recta* y fija la condición que, por ejemplo, el punto x_0 encuéntrase al lado izquierdo de X.

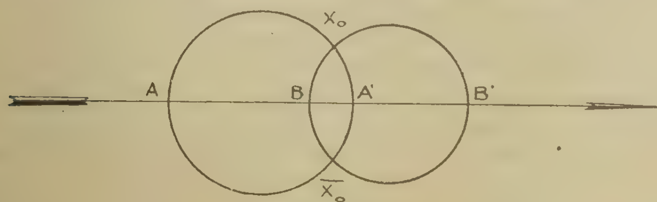


Figura 1

Aplicando el principio de la dualidad, en el plano, obtenemos enseguida la representación geométrica de la *recta imaginaria*. Consideramos un punto real P y una *involución elíptica de rectas*, cuyo sostén es P, y que está determinada por dos pares de rectas que se separan. Orientando ahora el haz de rectas de tal modo que podamos distinguir entre recta imaginaria y su conjugada (determinada esta última por la *orientación inversa)*, obtenemos el resultado que una *recta imaginaria se representa geométricamente por una involución elíptica en un haz de rectas y una orientación del haz.*



Figura 2

Vamos a ver en qué manera pueden utilizarse estos métodos para construcciones en las cuales entran elementos imaginarios.

18. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS EN EL CAMPO COMPLEJO

Antes de proceder a las construcciones mismas conviene considerar la incidencia entre puntos y rectas complejos. Pueden presentarse cuatro casos [1], a saber:

[1] Véase FÉLIX KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus.*, tomo II; *Geometrie*, página 288 (2ª edición); en la tercera edición que mientras tanto apareció, se encuentra en la página 137.

1° Punto real sobre recta real;

2° Punto real sobre recta imaginaria;

3° Punto imaginario sobre recta real;

4° Punto imaginario sobre recta imaginaria.

El primer caso no ofrece nada de particular. En el segundo caso recordemos que el único punto real sobre una recta imaginaria es el punto de intersección de esta recta con la conjugada. La recta imaginaria y la conjugada son representadas por dos haces con el mismo centro y diferentes orientaciones. Por lo tanto, el punto real sobre una recta imaginaria es el centro del haz de rectas, que es el representante real de dicha recta.

En el tercer caso la recta real debe ser el sostén de la involución elíptica de puntos que representa el punto imaginario. Si un punto imaginario se encuentra sobre una recta imaginaria, el punto conjugado debe encontrarse sobre la recta conjugada. Por consiguiente, en el cuarto caso las involuciones de puntos y de rectas deben ser *perspectivas*.

Agregando, pues, a los puntos y rectas *reales* del plano las dos clases de involuciones que nos han servido de representantes reales de puntos y rectas imaginarios formamos un campo complejo, en el cual, a lo menos teóricamente, podemos estudiar a la vez y en forma real todos los elementos reales e imaginarios, que componen una figura geométrica. Pero, en la práctica, las construcciones gráficas mediante elementos complejos resultan demasiado complicados mediante el método de von Staudt. Para ver esto tratamos las dos siguientes construcciones duales, que se repiten a cada paso, a saber: trazar la recta que une dos puntos imaginarios que no se encuentran sobre la misma recta real y construir el punto de intersección de dos rectas imaginarias (no conjugadas). A base del método de von Staudt los problemas se presentan en la forma siguiente:

Se dan dos rectas orientadas y sobre cada una de ellas una involución elíptica. Se busca un punto desde el cual cada una de las involuciones es proyectada con su orientación respectiva por la misma involución de rectas.

Se dan dos puntos como centros de dos involuciones elípticas orientadas. Se busca una recta y sobre ella una involución de puntos que es perspectiva a los dos haces y cuya orientación concuerda con la orientación de los dos haces.

Al lector que conoce los elementos de la geometría proyectiva no le ofrecerá dificultad alguna ejecutar estas operaciones elementales:

pero al mismo tiempo él se dará cuenta qué complicada será cualquier construcción en el campo complejo a base del método de von Staudt.

Quiero mencionar todavía una modificación del método de von Staudt ideada por Félix Klein [1]. Para evitar la necesidad de orientar la involución lo que, según su opinión, trae un elemento ajeno al problema, Klein reemplaza la involución por el concepto más general de la *proyectividad cíclica*, de la cual la involución es un caso especial. Una proyectividad cíclica es una proyectividad de la siguiente clase: Consideremos, por ejemplo, dos series rectilíneas proyectivas sobre el mismo sostén. A un punto X_1 de la primera serie le corresponde un punto X'_1 en la segunda, y considerado este mismo punto X'_1 como un punto X_2 de la primera serie, le corresponderá un X'_2, etc. Si ahora, en esta proyectividad, al punto X_n le corresponde un punto X'_n que es idéntico con el punto X_1 de la primera serie, entonces la proyectividad se llama *cíclica*. El caso $n = 2$ caracteriza la involución. Para que la proyectividad misma ya establezca una orientación sobre la serie rectilínea deben ser dados tres puntos A, B, C. Una proyectividad en la cual a estos puntos les corresponden sucesivamente los puntos A′, B′, C′ es cíclica, si los puntos están ordenados en la manera siguiente (fig. 3):

A B C
C′ A′ B′

Figura 3

pero dicha modificación tompoco subsana las dificultades de la construcción, de modo que no nos vamos a ocupar más detalladamente con ella.

Veamos brevemente, todavía, cómo se modifica la representación real de un punto imaginario si éste coincide con su conjugado, es decir, si es real. Entonces se presentan dos posibilidades: la representación real de un punto real o es una *involución parabólica* (cuyos puntos fundamentales son confundidos) o es el mismo punto. En la práctica se adoptará la segunda representación ya para evitar complicaciones inútiles que traería la primera, pero también, por otro motivo, sobre el cual Study ha llamado la atención [2]. Una representación

(1) F. Klein, *Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie*, en *Mathematische Annalen*, tomo 22. K. Th. Vahlen en su obra *Abstrakte Geometrie*, Leipzig, 1905, página 164, llama a este método « equianarmónico » y la aplica extensamente en este libro.

(2) E. Study, *Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie*, tomo I. *Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen*, página 8.

real de elementos imaginarios sólo puede prestar servicios útiles si *no depende de un sistema de coordenadas.* Por lo tanto, la figura que es el representante real de un elemento imaginario debe encontrarse en tal relación con este elemento, que sea *invariante* con respecto a *cualquier movimiento real.* Si ahora este movimiento consiste en una rotación alrededor de un punto, entonces dicho punto queda en reposo y, por lo tanto, debe hacer lo mismo la figura que es su representante. Evidentemente, existe una sola figura que satisface esta exigencia y ésta es el punto mismo.

Por consiguiente, consideramos como representante real de un punto real a este mismo punto y también una recta real nos será representada por la recta misma.

19. EL MÉTODO DE EDUARDO STUDY

La representación real de elementos imaginarios según von Staudt es tan complicada que no puede ofrecer más que una ventaja teórica. Buscando una figura más sencilla que podría servir de representante real de un punto imaginario, Study encontró el *par ordenado de dos puntos,* sin tener conocimiento de los trabajos anteriores de Laguerre y Paulus, que, como ya hemos visto, habían pasado inadvertidos, y en los cuales ya se encuentra esta misma idea. Pero Study no se contentaba con esta representación superficial de un punto imaginario; él buscaba, y este es el gran progreso que le debemos, una relación entre las propiedades de puntos imaginarios y las propiedades de ciertas *transformaciones de puntos,* las cuales también operan con pares ordenados de puntos.

Study ha indicado dos diferentes pares ordenados de puntos para representar en forma real un punto imaginario. La *primera imagen* de un punto imaginario la obtenemos en la manera siguiente:

Sea $(\xi\eta)$ un punto complejo y $(\bar{\xi}\bar{\eta})$ su punto conjugado. Estos dos puntos determinan una recta real. Además, por cada uno de dichos puntos pasa una izquierda-isótropa y una derecha isótropa. Estas isótropas determinan dos puntos *reales,* (xy) y (uv), cuyas coordenadas son, por consiguiente, las siguientes (véase párrafo 13, nº 7):

$$x = \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} + \frac{\eta - \bar{\eta}}{2i} \qquad u = \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} - \frac{\eta - \bar{\eta}}{2i} \qquad (1)$$

$$y = \frac{\eta + \bar{\eta}}{2} - \frac{\xi - \bar{\xi}}{2i} \qquad v = \frac{\eta + \bar{\eta}}{2} + \frac{\xi - \bar{\xi}}{2i}.$$

Obtenemos fácilmente la relación :

$$x - iy = \xi - i\eta$$
$$u + iv = \xi + i\eta.$$

En lugar de emplear las coordenadas es más cómodo operar con los puntos mismos ; por lo tanto pongamos :

$$\begin{aligned} z &= x + iy = \bar{\xi} + i\bar{\eta} \\ w &= u + iv = \xi + i\eta \end{aligned} \qquad (2)$$

de tal modo que es :

$$\xi = (w + \bar{z}) : 2, \qquad \eta = (w - \bar{z}) : 2i. \qquad (3)$$

Definición : *Se entiende por la primera imagen de un punto complejo* ($\xi\eta$) *el par ordenado de puntos reales* (z) → (w).

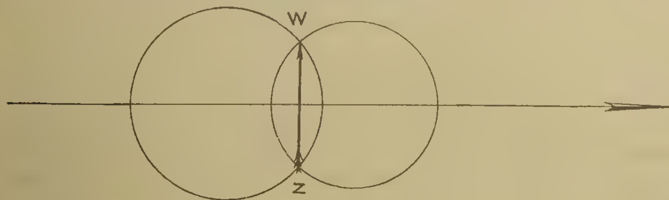


Figura 4

Estos puntos z y w están estrechamente vinculados con la representación real de puntos complejos según el método de von Staudt. Son los dos puntos desde los cuales la involución elíptica es proyectada por la involución de ángulos rectos [1].

La *segunda imagen* de un punto complejo, según la definición de Study, la obtenemos de la manera siguiente. Determinamos dos puntos (XY) y (UV) :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} - i\left[\xi - \frac{\xi + \bar{\xi}}{2}\right] = \frac{(1-i)\xi + (1+i)\bar{\xi}}{2} = \frac{\xi + i\bar{\xi}}{1+i} = \frac{\bar{\xi} - i\xi}{1-i} \\ Y &= \frac{\eta + \bar{\eta}}{2} - i\left[\eta - \frac{\eta + \bar{\eta}}{2}\right] = \frac{(1-i)\eta + (1+i)\bar{\eta}}{2} = \frac{\eta + i\bar{\eta}}{1+i} = \frac{\bar{\eta} - i\eta}{1-i} \end{aligned} \qquad (4)$$

[1] Véase la ya citada obra : STUDY, *Ebene analytische Kurven und die zu ihnen gehörige Abbildungen*, página 10.

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\xi+\bar\xi}{2} + i\left[\xi - \frac{\xi+\bar\xi}{2}\right] = \frac{(1+i)\xi+(1-i)\bar\xi}{2} = \frac{\xi - i\bar\xi}{1-i} = \frac{\bar\xi + i\xi}{1+i} \\ V &= \frac{\eta+\bar\eta}{2} + i\left[\eta - \frac{\eta+\bar\eta}{2}\right] = \frac{(1+i)\eta+(1-i)\bar\eta}{2} = \frac{\eta - i\bar\eta}{1-i} = \frac{\bar\eta + i\eta}{1+i}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

También en este caso formamos valores complejos Z y W mediante las relaciones :

$$\left.\begin{aligned} Z &= X + iY \\ W &= U + iV. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ahora enunciamos la siguiente

Definición : *Se entiende por la segunda imagen de un punto complejo el par ordenado de puntos* (Z) → (W).

Entre las dos imágenes existe una relación muy sencilla. Fácilmente se comprueban las siguientes relaciones :

$$(W + Z) : 2 = (w + z) : 2$$
$$(W - Z) : 2 = i\,(w - z) : 2.$$

La primera de estas relaciones demuestra que los intervalos zw y ZW tienen el mismo centro. La segunda relación, según un teorema elemental de la teoría de las funciones de una variable compleja, significa una rotación de zw alrededor del centro común de un ángulo de 90°. De tal modo que las dos imágenes de un punto complejo forman la figura 5, y es fácil construir una de las dos imágenes conociendo la otra.

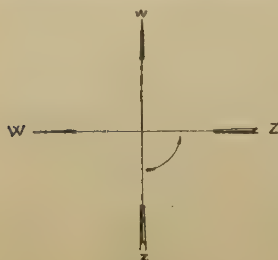


Figura 5

Si el punto es *real*, entonces las fórmulas demuestran que z coincide con w (y por consiguiente Z con W), es decir, la representación real de un punto real es el punto mismo.

Evidentemente, también la segunda imagen de un punto complejo tiene una relación muy estrecha con la involución elíptica, por la cual von Staudt ha representado un punto complejo. Z y W son los puntos que en la involución se corresponden, cuyo centro coincide con el centro de la involución. Pero el sentido definido por (Z) → (W) es opuesto al sentido de la involución.

Además, se ve directamente que la figura zZwW es invariante con

respecto a los movimientos reales que ejecuta el punto $(\xi\eta)$; por consiguiente, la representación real de un punto imaginario ideada por Study también es independiente de un sistema de coordenadas.

20. LOS PUNTOS IMAGINARIOS DE UNA RECTA REAL

Mediante las fórmulas del párrafo anterior ya podemos representar en forma real los puntos imaginarios sobre una recta real. Por ser cada recta real congruente con cualquier otra (lo que no vale para las rectas isótropas), es suficiente investigar una de ellas cuya ecuación tenga una forma sencilla [1], por ejemplo:

$$\eta = 0.$$

Entonces todos los puntos imaginarios de la recta pueden representarse en la forma: $s + i \cdot t$, de tal modo que podemos escribir la ecuación de la recta en la forma paramétrica:

$$\xi = s + i \cdot t, \qquad \eta = 0.$$

Mediante las fórmulas (1) del párrafo 19 obtenemos:

$$x = s, \qquad u = s$$

$$y = -t, \qquad v = t.$$

Por las fórmulas (5) obtenemos:

$$z = s - i \cdot t, \qquad w = s - i \cdot t = \bar{z}.$$

Tomando en consideración que z y $\bar{z}$ son puntos simétricos respecto a la recta, podemos enunciar el resultado:

La primera imagen de los puntos imaginarios de una recta real es la totalidad de los pares de puntos reales que son simétricos a dicha recta.

En forma más breve podemos decir también:

La primera imagen de los puntos imaginarios de una recta real es la transformación por simetría con respecto a la recta real.

Por la sola definición de la segunda imagen de un punto imagina-

(1) En los párrafos siguientes empleamos para las diferentes clases de rectas complejas ecuaciones sencillas, de las cuales todas las otras pueden obtenerse mediante una transformación real por semejanza (véase H. BECK, *Koord. Geom.*, pág. 76).

rio se entiende que ésta nos da únicamente los puntos de la recta misma, es decir, en este caso *la segunda imagen no da una transformación.*

La transformación por simetría es una transformación «equi-areal», lo que quiere decir que la figura transformada tiene la misma area que la figura primitiva. Pero, como el sentido en el cual se recorre la figura se transforma en el opuesto, el área se multiplica por el valor — 1, y para distinguir la presente transformación de otras equi-

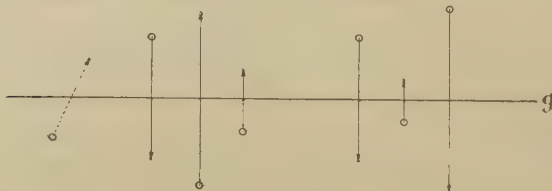


Figura 6

areales que *no* alteran el signo, se llama también *impropiamente equiareal,* mientras las otras llevan el nombre de *propiamente equiareales.*

La figura 6 muestra seis puntos imaginarios que se encuentran sobre la recta real g, y además, para mejor ilustración, un punto imaginario que no pertenece a la recta.

21. REPRESENTACIÓN REAL DE LAS RECTAS ISÓTROPAS

Sin dificultad alguna podemos determinar ahora las imágenes de los puntos de una isótropa. Consideremos primeramente la *isótropa-izquierda.*

Todos los puntos de esta isótropa pueden representarse mediante parámetros *reales* s y t en la forma siguiente, si el punto real de la isótropa coincide con el centro del sistema de coordenadas:

$$\xi = s + i \,.\, t, \qquad \eta = t - i \,.\, s.$$

Determinando los valores de (x,y) y de (u,v), obtenemos el resultado:

$$x = 0, \qquad u = 2s,$$
$$y = 0, \qquad v = 2t.$$

Calculando ahora los valores para z y w, resulta que todas las flechas $(z) \rightarrow (w)$ tienen su punto inicial en el centro del sistema de coordenadas, es decir, en el punto real de la isótropa (véase fig. 7).

La figura representa el punto real de la isótropa y cuatro puntos imaginarios de la misma; además, se ve un punto imaginario que *no* pertenece a la isótropa.

Referente al mismo sistema de coordenadas, los puntos de una *isótropa-derecha* se representan en la forma siguiente:

Figura 7

$$\xi = s + i \,.\, t \qquad \eta = -t + i \,.\, s.$$

Para los valores de (x,y) y de (u,v), resulta ahora:

$$x = 2s \qquad u = 0$$
$$y = -st, \qquad v = 0.$$

Obtenemos, por consiguiente, el resultado que todas las flechas $(z) \rightarrow (w)$ tienen el *mismo punto final* que es el *punto real* de la isótropa.

La figura muestra el punto real y cuatro puntos imaginarios de la derecho-isótropa y, además, un punto imaginario que no se encuentra sobre la isótropa.



Figura 8

Por lo tanto, podemos enunciar el siguiente teorema:

La primera imagen de los puntos de una isótropa-izquierda son pares de puntos $(z) \rightarrow (w_i)$ *con el mismo punto inicial, que es el punto real de la isótropa; la primera imagen de los puntos de una isótropa-derecha son pares de puntos* $(z_i) \rightarrow (w)$ *con el mismo punto final, que es el punto real de la isótropa.*

En ninguno de los dos casos la primera imagen constituye una transformación. Vamos a estudiar ahora la *segunda imagen de los puntos de las isótropas.*

Mediante las fórmulas (4) del párrafo 19 formamos los siguiente valores:

$$X = s + t, \qquad U = s - t,$$
$$Y = t - s, \qquad V = t + s.$$

Entre éstos existen las relaciones ;

$$X = V, \qquad Y = -U.$$

por consiguiente resultan las siguientes expresiones para Z y W :

$$Z = V - i \, . \, U, \qquad W = U + i \, . \, V.$$

$$W = i \, . \, Z.$$

Según un ya citado teorema elemental de la teoría de las funciones de una variable compleja, la última relación significa que el punto W de la flecha se obtiene del punto inicial Z mediante una rotación de un ángulo recto en sentido positivo alrededor del centro de coordenadas. Obtenemos, por lo tanto, el resultado :

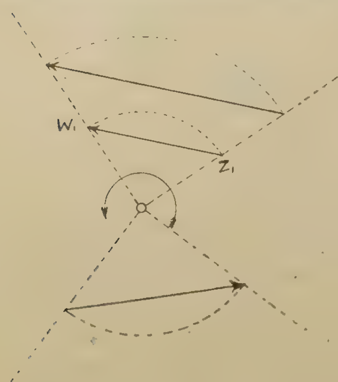


Figura 9

La segunda imagen de los puntos de una isótropa-izquierda es una rotación de un ángulo recto en sentido positivo, siendo el punto real de la isótropa el centro de la rotación.

No ofrece la menor dificultad hacer los mismas investigaciones en el caso de la isótropa-derecho, obteniéndose el resultado siguiente :

La segunda imagen de los puntos de una isótropa-derecha es una rotación de un ángulo recto en sentido negativo, siendo el punto real de la isótropa el centro de la rotación.

22. LOS PUNTOS IMAGINARIOS DE UNA RECTA IMAGINARIA DE DIRECCIÓN REAL

Podemos elegir el sistema de coordenadas de tal modo que la ecuación de la recta será

$$\eta + i \, . \, r = 0,$$

siendo r una constante real y diferente de cero.

Entonces los puntos de esta recta pueden representarse mediante parámetros en la siguiente forma :

$$\xi = s + i \, . \, t, \qquad \eta = - i \, . \, r.$$

Para estudiar la primera imagen de los puntos de esta recta formamos:

$$x = s - r, \qquad u = s + r,$$
$$y = -t, \qquad v = t.$$

Luego obtenemos:

$$z = s - i.t - r$$
$$w = s + i.t + r,$$

de lo cual sacamos en seguida:

$$w = \bar{z} + 2r = \bar{z} + \text{const.}$$

La transformación $(z) \to (w)$ constituída por esta última fórmula se compone de dos transformaciones sencillas, a saber:

1ª La transformación por simetría con respecto a la paralela real a la recta imaginaria, representada por la ecuación: $\eta = 0$;

2ª La traslación paralela a la recta $\eta = 0$ por el valor de $2r$.

La primera de estas transformaciones coordina a cada punto z su punto conjugado $\bar{z}$, y la segunda aplica a $\bar{z}$ una traslación paralela a la recta $\eta = 0$ hasta llegar al punto w (véase fig. 10).

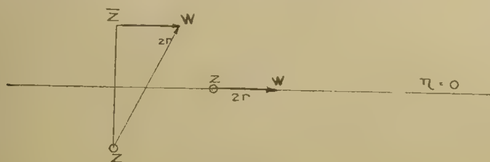


Figura 10

Para un punto z de la recta $\eta = 0$ la transformación se reduce a una translación de $2r$ a lo largo de la misma recta; por consiguiente, dicha recta se transforma en sí misma (recta de reposo).

Definición: Una transformación que a un punto P le coordina un punto P′ se llama *involutoria* si ella al punto P′ le coordina el mismo punto P.

Una transformación involutoria es, por ejemplo, la transformación simétrica con respecto a una recta. La transformación de la cual se trata ahora, evidentemente, *no* es involutoria. Tampoco pertenece a un grupo; porque considerando el punto w (fig. 10) como punto z, entonces esta transformación le coordina un punto w_1 y se ve directamente que la transformación $(z) \to (w_1)$ es una translación por $4r$, es

decir, es una transformación de otra índole. Ahora podemos enunciar el resultado:

La primera imagen de los puntos de una recta imaginaria de dirección real es una transformación no involutoria, que consiste en la transformación simétrica con respecto a una paralela real a la recta imaginaria (recta de reposo) y una translación paralela a la recta de reposo (1).

La figura 11 muestra cinco puntos de la recta imaginaria y, además, otro punto imaginario que no pertenece a la recta imaginaria. Evidentemente, la presente transformación es *impropiamente equiareal*, de tal modo que la figura formada por los puntos finales (w) de las flechas es congruente con la figura formada por los puntos iniciales (z) pero de sentido opuesto. Todos los puntos (w) que pertenecen a puntos (z) de una recta también se encontrarán sobre una recta. Una paralela a la recta de reposo se transformará en otra paralela que es simétrica a la primera con respecto a la recta de reposo.

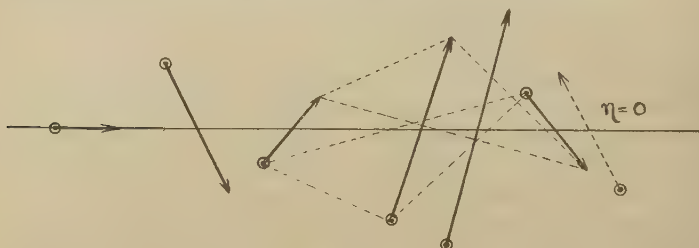


Figura 11

Estudiaremos ahora la *segunda imagen* de los puntos de una recta imaginaria de dirección real. Mediante las fórmulas del párrafo 19 formamos los siguientes valores:

$$X = s + t, \qquad U = s - t,$$
$$Y = -r, \qquad V = r.$$

Luego obtenemos:

$$Z = s + t - i \cdot r$$
$$W = s - t + i \cdot r.$$

(1) Es una transformación ortogonal de determinante — 1, que forma, por lo tanto, un grupo mixto con el grupo de los movimientos. El doctor Rey Pastor por eso lo llama « pseudo movimiento ».

Para poder interpretar con más facilidad estas fórmulas, introducimos nuevas variables σ y τ, poniendo:

$$\sigma = s + t, \qquad \tau = s - t.$$

Entonces obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \sigma - i \cdot r, \\ W &= \tau - i \cdot r, \end{aligned}\right\} r = \text{const.}$$

Geométricamente interpretadas dicen estas fórmulas lo siguiente: todos los puntos iniciales (Z) de las flechas encuéntranse sobre una paralela a la recta $\eta = 0$, y todos los puntos finales (W) sobre la paralela simétrica con respecto a la misma recta.

Tomando en consideración una observación que hicimos más arriba, podemos decir que dichas paralelas son rectas que se corresponden en la transformación que constituye la primera imagen de la recta imaginaria.

Evidentemente, la coordinación de los puntos de dos rectas paralelas *no* constituye una transformación que tenga algún interés geométrico. Por esta razón podemos enunciar el resultado:

La segunda imagen de los puntos de una recta imaginaria de dirección real está formada por pares de puntos cuyos puntos iniciales y finales se encuentran sobre rectas paralelas; no constituye ninguna transformación.

23. LA RECTA IMAGINARIA DE DIRECCIÓN IMAGINARIA

Como sabemos, sobre cada recta imaginaria existe un punto real, el punto de intersección con la recta conjugada. Además, son reales las bisectrices de los ángulos que la recta forma con su conjugada. Tomando estas dos rectas como ejes de un sistema de coordenadas, la ecuación de la recta imaginaria puede escribirse en la forma:

$$\eta = i \cdot r\xi,$$

siendo r una constante real que es diferente de cero y de ± 1. Poniendo otra vez:

$$\xi = s + i \cdot t,$$

obtenemos la siguiente representación para los puntos complejos de la recta:

$$\xi = s + i \cdot t, \qquad \eta = -rt + i \cdot rs,$$
$$\bar{\xi} = s - i \cdot t, \qquad \bar{\eta} = -rt - i \cdot rs.$$

Mediante estas relaciones formamos directamente los valores siguientes :

$$x = s(1 + r), \qquad u = s(1 - r),$$
$$y = -t(1 + r), \qquad v = t(1 - r).$$

y luego :

$$z = s(1 + r) - i \,.\, t(1 + r) = (1 + r)(s - i \,.\, t)$$
$$w = s(1 - r) + i \,.\, t(1 - r) = (1 - r)(s + i \cdot t).$$

De estas últimas ecuaciones sacamos fácilmente :

$$w = \frac{1 - r}{1 + r} \cdot \bar{z} = c \,.\, \bar{z},$$

siendo c una constante real y diferente de cero por las condiciones impuestas a r. Esta transformación a cada punto complejo $\bar{z}$ le coordina otro punto complejo w, que se encuentra sobre la misma recta, que une $\bar{z}$ con el centro del sistema de coordenadas (en el caso presente con el punto real de la recta) y cuyo radio vector es igual al radio vector de $\bar{z}$ multiplicado por el factor c. Es, por lo tanto, una *transformación por semejanza* o, mejor dicho, una transformación *perspectiva,* siendo el punto real de la recta el centro de perspectividad. Para obtener la transformación $(z) \to (w)$ tenemos que agregar todavía una transformación por simetría que al punto (z) le coordina su conjugado $(\bar{z})$.

Por consiguiente, dicha transformación coordina a cada figura geométrica otra que es semejante a la dada pero de sentido opuesto, motivo por el cual la llamaremos *transformación impropiamente equiforme.* Luego podemos enunciar el resultado en la forma :

La primera imagen de los puntos imaginarios de una recta imaginaria de dirección imaginaria es una transformación impropiamente equiforme.

Para estudiar la segunda imagen de los mismos puntos formamos los expresiones :

$$X = s + t, \qquad U = s - t,$$
$$Y = r(s - t), \qquad V = -r(s + t),$$

entre las cuales existen las relaciones :

$$U = \frac{1}{r} \cdot Y \qquad (1)$$
$$V = -r \,.\, X.$$

Para estudiar esta transformacion, consideremos dos puntos de una elipse cuyos semiejes, mayor y menor, respectivamente, sean a y b. Mediante la anomalía excéntrica E las coordenadas de los dos puntos se expresan en la manera siguiente:

$$x_1 = a \cdot \cos E_1, \qquad x_2 = a \cdot \cos E_2,$$
$$y_1 = b \cdot \operatorname{sen} E_1, \qquad y_2 = b \cdot \operatorname{sen} E_2.$$

Considerando ahora dos puntos de la elipse que sean los extremos de

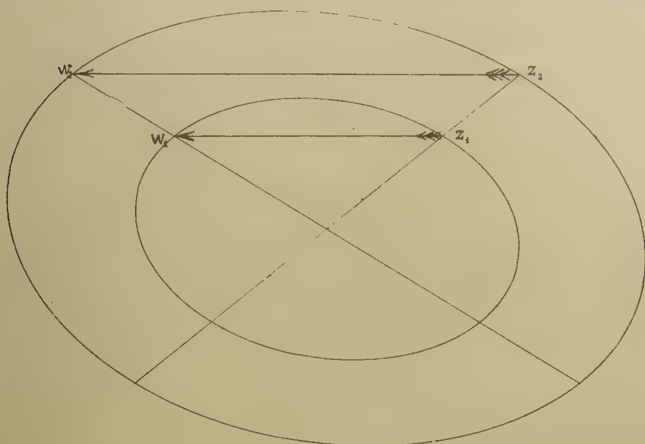


Figura 12

dos diámetros conjugados; sus coordenadas sean (X,Y) y (U,V). Además es $E_2 = E_1 + 90°$.

Luego obtenemos:

$$X = a \cdot \cos E_1, \qquad U = -a \cdot \operatorname{sen} E_1,$$
$$Y = b \cdot \operatorname{sen} E_1 \qquad V = b \cdot \cos E_1.$$

Existen las relaciones:

$$U = -\frac{a}{b} \cdot Y,$$

$$V = \frac{b}{a} \cdot X.$$

Poniendo ahora: $\frac{b}{a} = -r$, obtenemos directamente la ecuación (1).

El coeficiente r sólo depende del *cociente* de los semiejes de la elipse,

es por consiguiente el mismo para todas las *elipses semejantes*, para las cuales este cociente es constante. La interpretación geométrica de la transformación caracterizada por la ecuación (1) ahora es fácil.

Figurémonos cubierto todo el plano por un sistema de elipses semejantes en posición semejante; entonces por cada punto del plano pasa una curva del sistema. La transformación (1) le coordina a cada punto z un punto w, que se encuentra sobre la misma elipse que pasa por z, y que a la vez es punto de intersección de la elipse con el diámetro conjugado al diámetro por z (véase fig. 12).

El determinante de la transformación (1) es igual a $+1$, se trata, por lo tanto, de una *transformación propiamente equi-areal.* Es, además, una transformación afin de período cuatro, es decir, aplicando cuatro veces dicha transformación se llega a la identidad.

24. RESUMEN

En los párrafos 20 a 23 hemos tratado el método de Study, de representar los puntos imaginarios de las rectas complejas de dos maneras diferentes por un par ordenado de puntos. Dicha representación tiene el carácter de una transformación del primer punto al segundo, y reuniendo los resultados obtenidos para la primera y segunda imagen respectivamente de los puntos imaginarios, podemos enunciar el resultado en la forma siguiente [1]:

La primera imagen de una recta compleja es una transformación real e impropiamente equiforme $z \rightarrow w$; degenera la imagen de las isótropas.

La segunda imagen de una recta compleja es una transformación real, afin y propiamente equi-areal $Z \rightarrow W$ de período cuatro; degenera la imagen de la recta de dirección real.

Antes de tratar unas construcciones geométricas elementales a base de esta representación real de los puntos imaginarios, conviene estudiar las relaciones entre dos puntos imaginarios de las diferentes clases de rectas complejas.

25. LOS PARES DE PUNTOS

Según la naturaleza de una transformación geométrica entre las distancias de los puntos primitivos y de los transformados existen

(1) Véase: E. STUDY, *Ebene, analytische Kurven*, etc., página 31.

ciertas relaciones que podemos enunciar fácilmente usando las siguientes *definiciones :*

1ª Dos puntos $(z_1 \rightarrow w_1)$ y $(z_2 \rightarrow w_2)$ se llaman « isométricos » si la distancia $w_1 w_2$ es igual a la distancia $z_1 z_2$, sin que las flechas $z_1 \rightarrow w_1$ y $z_2 \rightarrow w_2$ sean paralelas ;

2ª Dos puntos $(z_1 w_1)$ y $(z_2 w_2)$ se llaman « paralelo-isométricos » si son isométricos y si a la vez las flechas $z_1 w_1$ y $z_2 w_2$ son paralelas ;

3ª Dos puntos se llaman « anisométricos » si no son isométricos.

Es fácil ahora construir los puntos de una recta compleja que está determinada por dos de sus puntos.

Es trivial la construcción de los puntos de una isótropa, es decir, si son dadas dos flechas con el mismo punto inicial o final respectivamente (véanse las figuras 7 y 8).

En los otros casos, si son dados dos puntos isométricos, paralelo-isométricos o anisométricos respectivamente, la tarea consiste en construir otros puntos cuyas flechas están en la misma condición de isometría respectivamente a las flechas dadas. Así, por ejemplo, siendo dados dos puntos paralelo-isométricos, entonces la recta compleja por ellos determinada, es la recta real que une los centros de las flechas (véase fig. 6); sus puntos imaginarios se obtienen facilmente coordinando a cada punto del plano el punto que le corresponde por la simetria axial con respecto a la recta real.

Si son dados dos puntos $(z_1 w_1)$ y $(z_2 w_2)$ isométricos o anisométricos, entonces para cualquier punto z_3 se encuentra el correspondiente w_3 construyendo el triángulo $w_1 w_2 w_3$ que sea congruente o semejante al triángulo $z_1 z_2 z_3$. (¡ Cuidado con el sentido !) (Véase fig. 11.)

La construcción de la *segunda imagen* de una recta compleja ahora no ofrece mayores dificultades.

26. UNA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA SENCILLA EN EL CAMPO COMPLEJO

Una aplicación muy sencilla de la representación real de puntos imaginarios es la construcción del centro de dos puntos complejos [1]. Sean $z_1 \rightarrow w_1$ y $z_2 \rightarrow w_2$, respectivamente, los dos puntos dados. Entonces el punto complejo, que divide el intervalo dado por estos dos puntos en la razón $m : n$, se representa en forma real por una flecha $z \rightarrow w$,

[1] Véase : H. BECK, *Koordinatengeometrie*, página 79.

de tal modo que z divide el intervalo $z_1 z_2$ y w el intervalo $w_1 w_2$ en la misma razón $m : n$. El caso más sencillo de esta construcción es éste: construir el punto medio de los dos puntos dados.

En la figura 13 están representados los puntos medios de dos pun-

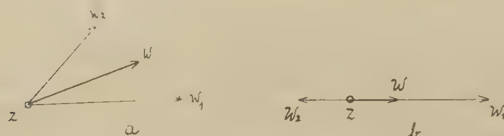


Figura 13

tos separados de una isótropa-izquierda. El lector, fácilmente, podrá completar los (tres) casos especiales que faltan y extender la construcción al caso de una isótropa-derecha.

La construcción de los puntos medios de dos puntos complejos de una recta real no ofrece ahora dificultades. En la figura 14 han sido tratados cuatro casos especiales, de los cuales c representa el caso en

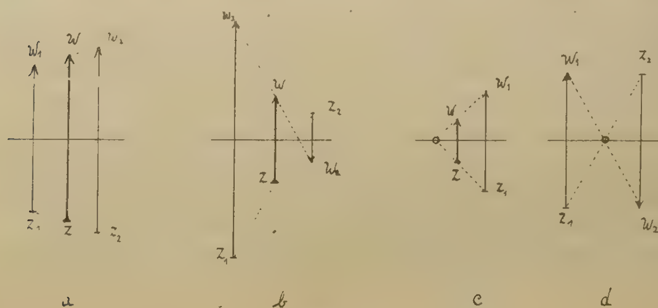


Figura 14

que uno de los puntos complejos sea real, y d el caso en que el punto medio de dos puntos imaginarios sea real.

En este último caso d la superposición de las dos flechas representaría el caso de dos puntos conjugados con su centro real.

En igual forma se hace la construcción en los otros casos de rectas complejas.

HISTORIA DE LA MINERÍA EN LA PROVINCIA DE SAN LUIS

POR J. W. GEZ

Si nos remontamos a la época lejana de la conquista hispánica, pocos son los datos que se han transmitido sobre la minería en San Luis, no obstante el afán de los primeros exploradores de buscar las riquezas que se suponían ocultas en sus montañas. Las había, en verdad, abundantes y variadas; pero a los conquistadores interesaba solamente los ricos yacimientos de oro y plata. Venían desde el Perú alucinados con el recuerdo del fabuloso tesoro encontrado en la opulenta capital de los Incas y la tradición de que gran parte de esa riqueza provenía de las comarcas del sur, de lo que hoy es Bolivia y la Argentina, adonde había alcanzado la penetración incana. Efectivamente, la conquista de los Hijos del Sol se realizó dos siglos antes de la conquista española.

Las poblaciones indígenas sometidas fueron obligadas a explotar las minas bajo la autoridad de los dominadores y a pagar tributos en metales preciosos.

Así se explica la existencia de los tesoros acumulados y que fueron los principales estímulos del ávido conquistador.

Según Ovalle y otros cronistas de la época colonial, los españoles recogieron un valioso botín en las regiones andinas, provenientes de las minas que los incanos explotaban en la parte de Chile conquistada y quizá de las comarcas vecinas, sabiéndose que ya entonces se trabajaban también los minerales de Famatina, en la Rioja, y otros en la actual región de Cuyo.

Este hecho lo ratifica el padre Lozano, y agrega que « en esas labores se empleaban millares de indios de la comarca y para su defensa tenían construídas varias fortalezas, en las cuales confiados se atre-

vían a resistir valerosamente el poder de los conquistadores españoles por muchos años hasta que, poco a poco, se fueron allanando ». Esta referencia la recoge el doctor Ameghino, y agrega que muchos de los objetos de piedra pulimentada y principalmente las hachas del tipo incano que se encuentran con frecuencia en esta vasta región corresponden a esa época.

Estos mismos utensilios y hachas se han hallado, y los he recogido en la zona minera puntana. El ingeniero Hoskold también reproduce la tradición de antiguos vestigios de los trabajos indianos en los cerros Gigante y Rico, este último conocido por el de Carolina, y dice que en el siglo XIII habían hecho galerías en cierta parte de la montaña. Supone que si realmente existieron deben haber restos de ellas y sus construcciones no pueden ser sino obras de los incas.

Sin embargo, termina manifestando que « sin más pruebas esta tradición le parece dudosa, y quedará en la obscuridad ».

Voy a aportar los datos que tengo reunidos al respecto. Conozco la región aurífera puntana por haber visitado las minas de Carolina, los lavaderos de Cañada Honda y del río La Carpa; por haber explorado los cerros y arroyos de la comarca y puesto empeño en recoger la tradición y las informaciones más serias de viejos mineros y de técnicos modernos. Con estos antecedentes pude ya referirme a antiguas y estrechas excavaciones en « chiflones », practicadas en la parte alta de las lomas y cerros donde eran visibles las vetas metalíferas. Los españoles las ensancharon, descubriendo que de un lado y en la misma roca habían labrado escalones para facilitar el descenso y salida de la mina. Para hacer estas excavaciones los incanos usaban una pequeña barreta o cuña de piedra llamada *llancana*; un martillo de piedra o *tacana*, y se sabe que empleaban también la cal viva para disgregar las rocas. Con tan rudimentarias herramientas despedazaban los filones y separaban la parte más rica y visible del oro.

El erudito señor Carlos E. Velarde, en su excelente *Historia del derecho de minería hispano-americano*, dice : « Que ha podido visitar algunas antiguas calinatas o pequeñas excavaciones, en ciertos cerros minerales del Perú que los naturales señalan como prácticadas por los « gentiles », diferenciándose de las labores mineras de los españoles en que no tienen trazas del uso de explosivos y de otros elementos mecánicos empleados por éstos. »

Estas excavaciones estrechas no tenían ventilación y se hacían, como se ha dicho, de arriba para abajo; pero no eran profundas. Para extraer el mineral emplearían probablemente el *noque* o saco de

cuero, y para molerlo se usaba el *maray* o el molino prehistórico de los naturales.

En el lecho de un arroyo de Cañada Honda encontré uno de estos curiosos molinos. Es un monolito de piedra, en forma de un cono truncado, de metros 1,50 de alto por 0,80 en la base. Calzaba sobre una piedra cóncava, donde se echaba el mineral para triturarlo, y se le imprimía un movimiento de rotación por medio de una vara o palanca puesta en una caladura hecha en su parte superior.

Con la ayuda de varios hombres levantamos el monolito y lo colocamos sobre su base, que también encontramos en la orilla del arroyo y de donde recogimos fragmentos de minerales y arenas auríferas. También hallamos las huellas del canalito, sacado del arroyo para lavar el mineral; el agua caía de cierta altura sobre el *maray* en funcionamiento. El nombre de *maray* lo tienen varios arroyos y lugares de la región, donde frecuentemente ha funcionado. Los españoles lo usaron en esas labores. Además existen morteros de diverso tamaño, sueltos y cavados en las mismas rocas ribereñas, que han sido utilizados igualmente para la molienda de minerales. He recogido uno pequeño y bien trabajado, así como una rara pieza de piedra pulimentada, triangular y cóncava de 15 centímetros de altura por 10 de base. Supongo que este untensilio debió usarse para ensayar ricos minerales en proporciones muy reducidas; es algo así como una *poruña* de piedra.

En los lavaderos se usaban, y se usan aún para ensayar las arenas auríferas, unas fuentes circulares de madera, las cuales se llaman *chuas*.

El distinguido arqueólogo doctor Debenedetti ha encontrado en las tumbas de los huarpes, *poruñas*, platos de barro cocido, moldes y crisoles para fundir los metales. No obstante la vecindad con los huarpes, en nuestra provincia no se han hallado vestigios ni objetos de fundición.

A estas interesantes piezas prehistóricas se puede agregar aun varios términos de la minería incana. Las arenas removidas en el trabajo de las minas se llaman *llampos;* a la acción de golpear de abajo para arriba en el afan de desprender las vetas minerales se dice *cholana;* al relave, al hecho de rebuscar en los sitios trabajados y de recoger los desperdicios minerales utilizables, *pirquinear;* a los vasos y ollas para fundir, *callanas,* nombre que se aplica en la actuali dad a las ollas viejas de fierro destinadas a tostar el maíz con la ceniza caliente.

Independiente de los vestigios de antiquísimas excavaciones, de las piezas y del tecnicismo minero incaico queda aún la nomenclatura geográfica y otros indicios como prueba de que la región aurífera puntana fué ocupada por los Hijos del Sol. Allí está el cerro y la gran gruta de *Intiguasi* o Casa del Sol; en la parte norte de este cerro hay un campo sembrado de grandes rocas y farellones que le da el aspecto de ruinas prehistóricas, el cual se llama *Pucará* o sea el atrincheramiento, el campo fortificado, aunque a decir verdad no se notan los vestigios de *pircas* o muros de piedra sin labrar, que posteriormente se emplearon tanto en la región; el río que corre por la falda de *Intiguasi* se llama La Carpa, corruptela de *Tacarpu*, la estaca o límite de la concesión minera, y en ambas riberas de este río se ven aún los pozos o socavones de remotísimos lavaderos, pues las arenas de su corriente son ricas en pepitas de oro (1). Por último están los nombres dados a las cumbres más altas de los cerros traquíticos de la región, *Tomolasta* y *Sololasta* de 2020 y 1748 metros de altura respectivamente sobre el nivel del mar. La terminación *gasta* o *yacta* significa, en la lengua quichua, población o colonia, lugares ambos adecuados para asentar una población por sus arroyos permanentes y la fecundidad del suelo.

En cuanto a las tradicionales galerías hechas en cierta parte de la montaña, según la referencia de Hoseckold, bien pueden ser las como corredores de Sololasta, producidas por una fuerte erosión de lsa rocas o las cavernas de la Casa Pintada que quedan enfrente o finalmente la gran gruta de Intiguasi, en cuyo lado opuesto parece como si se hubiera dado comienzo a abrir un túnel; pero en ninguna parte de esas serranías se han descubierto galerías artificiales de la época prehispánica, sabiéndose que las existentes fueron obra de los mineros españoles. De las primeras de las cuales tengo noticias, son las galerías de intersección del cerro Rico, las que, según el citado ingeniero Hoseckold, pusieron en descubierto una veta de oro casi puro; pero en la semana de Pascua de 1640 se derrumbó el techo, quedando muchos mineros españoles e indios sepultados vivos. Evidentemente el ingeniero Hoseckold está mal informado sobre la fecha en que se produjo ese hundimiento, pues en ese tiempo no había en la jurisdicción puntana otros pobladores que los muy escasos del des

(1) En 1897 de allí extrajo el minero Neira una pepa de oro puro de un peso de 800 gramos, hecho que testimonia el ingeniero Gualterio Yeldham *(Biografía del doctor J. C. Lafinur)*.

tacamento o fuerte de San Luis de la Punta de los Venados, allí establecido para proteger las comunicaciones de Cuyo con el litoral argentino. Casi medio siglo después, en 1682 se otorgó la merced de Tomolasta y campos vecinos, y recién en 1784 se descubrieron las minas de oro de ese lugar.

El hundimiento del cual se tiene noticia cierta fué el de la galería de Lafinur y Pinedo abierta en el Cerro Rico, el cual se produjo en víspera de las invasiones inglesas como se refiere más adelante.

Tales son los pocos datos y referencias sobre la probable explotación de la minería puntana en la época prehispánica.

ÉPOCA COLONIAL

La historia propiamente dicha de la minería puntana comienza con el descubrimiento de los yacimientos de oro de San Antonio de las Invernadas, después Carolina, al pie del hermoso cerro Tomolasta, suceso acaecido en 1784. Según un expediente iniciado por don Vicente Becerra para solicitar la posesión judicial de los campos de las Invernadas a nombre de su esposa, legítima heredera de don Tomás Lucio Lucero, dichas minas fueron descubiertas por un lusitano Jerónimo, cuyo apellido declara no recordar. Sin embargo, el informe que el gobernador intendente de Córdoba, marqués de Sobremonte, pasó al virrey de Buenos Aires, atribuye ese descubrimiento a Bartolomé Arias Renzel, agregando que a fines de 1784 empezaron dos sujetos a catear en aquel sitio y descubrieron granos de oro, con los cuales se presentaron solicitando posesión o estacas, y, para promover el adelantamiento de esas labores, se les concedió con las dimensiones de la ordenanza de Nueva España. Agregó que, en consideración a ser por entonces «lavadero», se ajustaron por equivalente las 200 varas que prescribe el «hilo» de la veta a la cuadra de 50 varas por frente.

El nombrado Becerra declaró que en un principio se suspendió el laboreo por falta de inteligentes, no obstante lo cual Arias Renzel sacó mucho oro, y pedía que de acuerdo con las ordenanzas puestas en vigencia se obligase a los mineros a pagar el 1 por ciento, así como el arrendamiento de las tierras. El gobernador intendente dió la debida intervención en el asunto a la autoridad de San Luis y previo el informe del subdelegado don Juan de Videla, proveyó en todo como lo solicitaba Becerra.

Divulgada la noticia de este descubrimiento, acudieron muchos mineros y especuladores de Buenos Aires, Córdoba y hasta de Chile a pedir concesiones y a comprar el precioso metal. La imaginación y el interés de los negocios exaltaron la importancia de la riqueza minera, al extremo de sostenerse que al fin se había encontrado « El Dorado », tan buscado por los primeros conquistadores. Fué entonces que la autoridad principal tomó las providencias consiguientes para determinar el arreglo de la población que empezaba a nuclearse al pie del Tomolasta, así como al establecimiento indispensable al buen orden de justicia y al rescate de las cajas reales.

Como no existía en la provincia un ensayador que determinara la ley de oro, se mandaron las muestras a Potosí, cuyo gobernador informó que en el cuarzo había resultado oro de 18 quilates.

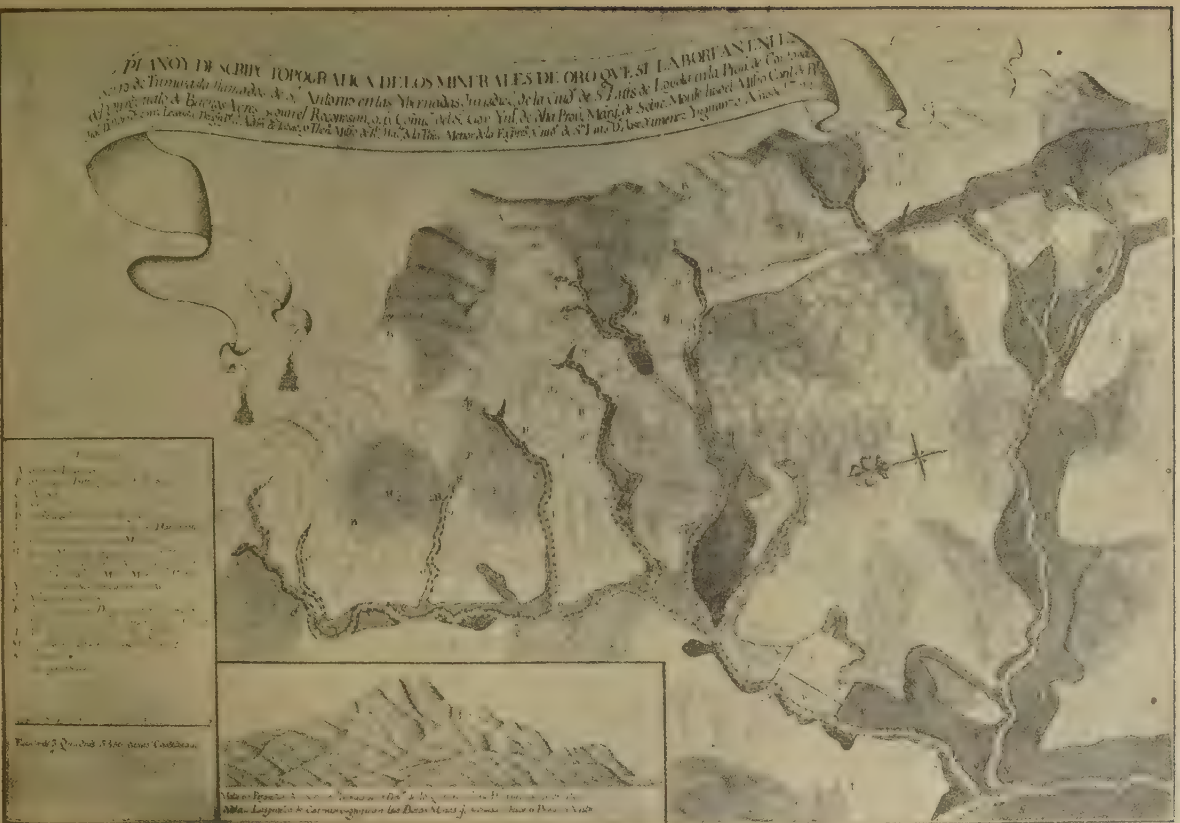
Bajo tan buenos auspicios se iniciaron empeñosamente los trabajos, pero como los mineros no hallaron las riquezas con que se ilusionaron, no obstante haber extraído una porción no despreciable sin profundizar las excavaciones, comenzaron a abandonar sus labores.

La causa principal del fracaso estaba en la poca pericia y en la impaciencia por recoger de llegada un fácil tesoro, a lo cual se agregaba el clima excesivamente frío en invierno, pues no son extrañas las temperaturas de 8 a 10° bajo cero, tanto más inaguantable cuanto se carecía de habitaciones y de combustible.

Entonces los mineros quedaron reducidos a cuatro o cinco trabajadores, los cuales, más constantes que la generalidad, continuaron las tareas con nuevo ardimiento en cateos y excavaciones. Así se pasó desde 1786 hasta fines de 1790 con resultados más o menos satisfactorios, y aunque se encontraron algunos tejos de oro nativo puro sólo servían para sostener la fe en las futuras riquezas que hacían vislumbrar aquellos felices hallazgos, porque los gastos eran crecidos y enorme los sacrificios. Un juez comisionado alentaba la esperanza y estimulaba los trabajos, los cuales se extendieron en afanosas búsquedas de mejores vetas removiendo las serranías vecinas.

A principios de 1791 los mineros comenzaron a descubrir algunas porciones de oro de mejor ley, a medida que iban profundizando las excavaciones a 6, 7 y más estados (1), logrando lo que llamaban « alcances o bolsones » en varias rocas con el oro visible en claros y ra-

(1) El estado era una medida equivalente a 7/3 de vara, o sea 2/3 varas igual a metros 1,95.



Mapa del mineral de las Invernadas (Carolina). Año 1792

mificaciones, las cuales una vez molidas dieron un rendimiento considerable. De nuevo cundió la gran noticia de las riquezas minerales de esta región, volviendo muchos mineros de Córdoba y de otras partes a solicitar posesiones ya alecionados por la dura experiencia, lo que importa decir que venían con mejores elementos de trabajo.

La fortuna seguía favoreciendo a los mineros, pues los resultados eran cada vez más halagüeños a juzgar por el testimonio fehaciente de la época, el cual asegura que se encontraron vetas y ramificaciones con muchas onzas y aun con libras de oro puro.

Con motivo de la nueva concurrencia de mineros y de convenir los informes de que se mantenía la riqueza del mineral, el marqués de Sobremonte comisionó al teniente asesor para visitar las minas y de informar puntualmente sobre su estado a fin de hacer transmitir noticias exactas al rey. Verificada la inspección en enero de 1792 halló 25 minas en plena labor, fuera de muchos individuos que se ocupaban de cateos y de otras faenas, de todo lo cual dió cuenta detallada, indicando las necesidades más urgentes al mantenimiento del orden, al rescate de oro y al fomento de la incipiente población de Carolina. A raíz de este informe se mejoraron los caminos, se estableció la policía y se recogieron los vagos para proveeer de peones a las minas, a semejanza de los indígenas de mita o mitayos que se reclutaban en los centros numerosos del Perú. También se mandó levantar el plano de las minas, trabajo que realizó don José Ximénez Inguanzo, hábil cartógrafo y ministro de la real hacienda de San Luis. Este curioso documento gráfico lo hice copiar en el Archivo de Indias.

Poco después vino a inspeccionar las minas el Ministro de la real hacienda de Mendoza y en la comunicación que elevó a la superioridad se hace presente que hasta entonces se carecía de trapiche, ingenio o maquinaria para moler los minerales. Más tarde se proveyo también a esta necesidad, diciéndose que aunque el arroyo donde se halla la nueva población es de excelente agua no provee la necesaria para el establecimiento de una maquinaria, y por esa causa el primer trapiche se construyó a 8 leguas al sur de Carolina a la margen de un mediano río, el cual se llamó desde entonces río del Trapiche, afluente del río Grande, que riega la pintoresca población veraniega de su nombre en la terminación meridional de la sierra de San Luis.

Para construir este trapiche se pidió a Potosí el modelo de la maquinaria de cuatro barriles ideada por el metalúrgico Juan Daniel

Weber, el cual funcionó con excelentes resultados. He alcanzado a conocer este trapiche y aún se conservan sus ruinas.

Por último, Sobremonte hizo presente al virrey la conveniencia de aplicar las ordenanzas de Nueva España para el trabajo de las minas; la de tener un perito en el ramo y el establecimiento de un banco de avíos y rescates en el caso que se aumentara la producción de oro. El virrey Arredondo se manifestó muy de acuerdo con estas ideas, y aprovechó la primera oportunidad para prestar su concurso al mineral de Carolina como lo evidencia la siguiente nota dirigida al ministro de la corona don Diego de Gardoqui:

« Habiéndose presentado un don José María Caballero, que costeado por la real hacienda, vino de Cádiz sobre la fragata de la real armada *Santa Rufina,* diciendo ser minero de profesión y alumno del Colegio de Méjico y que traía su destino para la dirección de Lima, me pareció ocasión oportuna de proporcionar a aquellos mineros un auxilio tan importante, con cuya idea procuré y conseguí que un vecino de esta ciudad que acababa de establecer una labor en las Invernadas le costeara su paso por aquel paraje, por ser vía o camino para seguir el de su destino, y con este motivo le encargué que hiciera los necesarios y convenientes reconocimientos de los minerales de San Luis; me informaré de su estado y del juicio que formare de sus ponderadas riquezas y de cuanto concibiera conducente a su fomento: lo que efectivamente ha practicado firmando en consecuencia el papel que, con su contestación y prevenciones hechas al gobernador intendente de Córdoba, incluyo a V. E. »

El perito Caballero se trasladó a Córdoba y de allí a Carolina. En su extenso informe manifiesta que a pocas observaciones y repetidos ensayos comprendió que su cerro ocultaba un tesoro de aquel metal precioso. Después de determinar con acierto la veta principal en el cerro Rico y de explicar la formación de los depósitos auríferos que se encuentran primeramente en los lavaderos dice: « En el dilatado tiempo que viajo en ambas Américas no he visto un suelo en que la naturaleza se encontrare más pródiga para que los hombres se dedicasen a disfrutar sus riquezas. »

Ocupándose de los trabajos llama la atención sobre la deficiencia con que se hace por falta de maquinaria y conocimientos técnicos, pues sólo se contentaban con reducirlos a delgadas arenas a fuerza de brazo entre dos pequeñas y mal formadas piedras, la una cóncava y la otra plana, y después de ésta tan futil como complicada tarea, lavan dichas tierras en unas circulares bateas de madera y sin más



Las galerías naturales del cerro Sololasta

exámenes que este débil recurso e industria, a que dan nombre de ensayos, extraen bastantes riquezas. Termina aconsejando las medidas que a su juicio deben tomarse para seguridad de los mineros, economía y mayor beneficio de sus labores. Su dictamen fué tenido muy en cuenta y aceleró los trabajos en principio de ejecución, así como la obra del trapiche para la molienda de los minerales.

Con un informe acompañó las muestras de los minerales en tres cajoncitos y una sucinta relación, de la cual extracto los datos siguientes:

Número 1. Es de calidad superior extraído de lo que llamamos « alcance o bolsones ». Es oro nativo y perfectamente puro. Se ha observado hallarse en cinco labores que están desde 10 a 15 estados, las cuales son las más profundas, hasta ahora del nuevo mineral.

Número 2. Contiene los metales de segunda clase. Hállase en granos y ramificaciones en las rocas. La vena metálica es bastante compacta. Se encuentra entre 7 y 8 estados, habiendo 13 a 14 libras.

Número 3. Contiene los metales comunes de tercera clase que consisten en substancias plomosas blandas y suaves, compuestas, según se gradúa por ensayos, de arcilla, azufre y piritas de bronce, cuyas substancias tiene generalmente al bajo de la veta. Ésta lleva su rumbo, aunque serpenteando, de norte a sur, de cuyo cuerpo se dividen varias estrechas ramificaciones a otros rumbos, extendiéndose el mayor número de este a oeste, y terminando en la superficie.

Esta veta del cerro Tomolasta está conocida por natural o veta madre, siendo según las noticias adquiridas la de esta clase, ya en oro o en plata, las que ofrecen al minero el logro de sus tareas, y sobre ellas están posesionadas la mayor parte de aquellos nuevos mineros. Este metal se halla en las labores que empiezan y se encuentran hasta los 5 y 6 estados que son los restantes y el completo de los 40 que se están trabajando.

Estas muestras fueron enviadas a España, donde las analizó el químico Gutiérrez Bueno. En los primeros minerales constató el oro nativo con 38 décimos de plata por ciento, y los últimos fueron clasificados como sulfuros de oro, conteniendo un 7 por ciento de plata.

En presencia de estos resultados y del halagador informe de Caballero, el Rey dió instrucciones a las autoridades del virreinato para que prestaran preferente atención al fomento de la minería y al establecimiento de un banco de depósito.

En cuanto a los derechos reales debían ser pagados en metal y llevado a Potosí para su acuñación o remitidos a España en barras selladas.

Una de las minas más famosas fué la de Pinedo y de Lafinur, abandonada por el hundimiento del cerro, en la labor más rica, llevada entonces por un crucero visible y de donde se asegura cortábase el oro a cincel. Refieren las noticias de la época que el hundimiento fué gradual y cuando comenzó el descenso se había dado con un alcance tan rico que en menos de dos horas se quebraron más de tres arrobas de mineral casi puro, cuya mayor parte quedó enterrada porque los trabajadores se pusieron a salvo en cuanto advirtieron el peligro, y sólo se extrajo cerca de una arroba que pudo cargar en el apuro el mayordomo de la mina. Lafinur emprendió entonces la apertura de un socavón horizontal que arrancando de la base del cerro fuera a cortar la veta a 50 varas más abajo del laboreo hundido y en su misma dirección. La longitud del socavón debió ser de 160 varas, pero cuando se había llegado a las 125 fueron interrumpidos los trabajos por el grave suceso de las invasiones inglesas. Lafinur vióse obligado a irse urgentemente a Córdoba para marchar con su regimiento a la reconquista de Buenos Aires.

Las otras minas fueron también abandonadas por falta de técnicos y porque se inundaron, siendo imposible vencer las dificultades para extraer el agua en una época « en que el balde manejado por malos piquetones era el único medio de desagüe conocido en estos países », según lo expresa una interesante comunicación de esos tiempos.

Quedaron solamente los « pirquineros », o sean los ocupados en el relave de las tierras auríferas, en el « desflore » o broceo de las vetas visibles y en la paciente tarea de lavar las tierras auríferas en los arroyos de la región.

El rendimiento del mineral en los años anteriores a las invasiones inglesas fué tan extraordinario que, según las guías dadas en 1797 para la exportación, ésta alcanzó a más de 150 libras de oro puro, sin contar lo que no salía de la provincia o el que se expendía subrepticiamente eludiendo el pago de los derechos reales.

Había, como se ve, muy fundados motivos para creer que la región aurífera de Carolina era el país del Dorado, buscado con tanto afán por los primeros conquistadores en los contrafuertes orientales de la cordillera andina.

PERÍODO NACIONAL

Durante los primeros tiempos del gobierno patrio no se registra ninguna disposición relacionada con el fomento de la minería en la



Minas de Carolina

provincia. Recién en 1824, el gobernador José Santos Ortiz se interesa por ella para contestar al gobierno de Buenos Aires la circular que pasó a las provincias, requiriéndole datos sobre sus minas.

Rivadavia había tomado esa iniciativa con el plausible propósito de atraer capitales ingleses para fomentar la industria minera argentina.

Ortiz mandó un informe en el cual demuestra conocer los antecedentes y el estado de las minas, suministrando datos importantes relacionados con su posible e inmediata explotación.

No obstante haberse formado la Compañía de Minas Argentinas con un capital de un millón de libras esterlinas, no pudo iniciar sus trabajos a causa de los trastornos políticos de la época y la oposición del interés privado de los caudillos adueñados de las provincias, los cuales, como Facundo Quiroga en La Rioja, también especulaban con sus minas.

Así es como fracasó la empresa y la patriótica iniciativa de Rivadavia, lo mismo que sucedió con otros anhelos progresistas del ilustre estadista.

En cuanto se relaciona con San Luis, vuelve la minería a encontrar algún estímulo bajo el gobierno patriarcal de don Pablo Lucero. Éste puso en vigencia las ordenanzas de Méjico, estableciendo un juez de minas con la obligación de llevar dos libros, en los cuales debía anotarse los amparos y posesiones, las demandas y fallos con que fueran resueltas y los derechos que de todo esto debiera resultar a beneficio del Estado y del juez. Con estos antecedentes se formó un interesante registro, el cual, desgraciadamente, no se ha conservado.

Por esa época dos inteligentes mineros, los señores Olmos y Jimenez, emprendieron trabajos importantes para desagüar los socavones del Cerro Rico y abrir nuevos y profundos piques. Las labores continuaron por algún tiempo con resultados más o menos alentadores, pero que permitieron sostenerse, conformándose con modestos beneficios.

En 1842, el gobierno local se propuso la acuñación de los metales de oro y plata, autorizándose el establecimiento de una casa de moneda. Fué el empresario don Romualdo Ares y Maldes, el cual se obligaba, por la concesión de ese privilegio, a comprar al contado y al precio corriente todo el oro y la plata que produjesen las minas de la provincia. El gobierno debía prohibir la exportación de estos metales y la venta a toda otra persona que no fuera el empresario. Éste sería el único dueño de la casa de moneda y gozaría de sus privilegios du-

rante seis años, pasados los cuales entregaría al Estado la maquinaria con todos los utensilios existentes.

Esta empresa no llegó a realizarse, continuando la exportación de los metales a Chile.

Durante el período constitucional, el gobernador don Justo Daract visitó las minas en 1858, dando cuenta a la legislatura en los términos siguientes:

« La industria minera es otro de los importantes ramos de riqueza de la provincia sobre la que debo llamar la atención de V. H., pues que ella es susceptible de un inmenso desarrollo por la abundancia de toda clase de minas que se encuentran, algunas de las cuales gozan de muy antigua y justa celebridad y son explotadas actualmente con brillante resultado. Entre ellas es muy notable, sobre todas, el inagotable lavadero de oro de Cañadas Hinda, en el departamento de la Carolina, no sólo por su incalculable riqueza sino también por los trabajos de alta importancia que en él han establecido los señores Zuviría, Rodríguez y Compañía, por medio de máquinas de desagües, etcétera, quienes además explotan otras minas de plata y cobre en diversos puntos de la Provincia; siendo de notar que dichos señores han planteado el « primer establecimiento de cobre » que existe en San Luís ».

« Han sido también recientemente denunciadas las antiguas y ricas minas de oro de la Carolina, una por la misma empresa Zuviría, Rodríguez y Compañía y la otra de la misma naturaleza, conocida con el nombre de De los Pinedos (1), por los señores Cortez Funes y Compañía, quienes se preparan a establecer en ellos trabajos en grande escala.

« Esta industria, que por nuestras disenciones pasadas y por falta de de capitales y empresarios había desaparecido de entre nosotros, hoy vuelve tomando un rápido desarrollo y augurando a la Provincia que muy pronto tendrá los medios de elevarse y progresar considerablemente, el gobierno está dispuesto a prestar a esta industria toda la protección que le sea permitido en la órbita de sus atribuciones pues que el buen resultado obtenido por los primeros especuladores, será un aliciente que llame al país la concurrencia de capitales extrangeros y brazos inteligentes que animen la industria en todas sus ramas. »

De acuerdo con estos elevados propósitos, se dictó un decreto en septiembre, estableciendo en su artículo 1°: « Todos los individuos que se ocupen en el laboreo de minas, ya en clase de mayordomos o

(1) La famosa mina de Pinedo y de Lafinur.



El Maray

peones, quedan exentos de todo servicio, tanto civil como militar, mientras permanezcan en tal ocupación.»

Ésta era una de las más grandes e importantes concesiones de la época, si se tiene en cuenta los frecuentes reclutamientos para la defensa de fronteras y la policía interior, en tiempos en que los indios y los montoneros mantenían en constante alarma a los vecindarios de campaña. Y estas levas no ofrecían a la milicia local ningún estímulo de esos que levantan el espíritu y la moral del soldado sino las fatigas, privaciones y sacrificios obscuros en aquella lucha irregular y sin gloria.

En Carolina se trabajaban por entonces las minas de Pinedo, Puebla y Argañarás, en las cuales se contaban 15 boca-minas y numerosos piques accesorios. El más profundo de ellos era el de Pinedo que tenía 22 estados perpendiculares o sean 51 varas.

En cuanto a los lavaderos de Cañada Honda, en una comunicación enviada por uno de los empresarios, don José Elías Rodríguez (publicada en *La Actualidad* de San Luis), se dice que se había extraído mucho oro sin máquinas y sin otra ayuda que la azada, lo cual había redituado a la empresa Zuviría, Rodríguez y Compañía una buena ganancia, vendiendo el oro en Chile. En la misma comunicación se afirma que no habían alcanzado a lavar 25 varas cuadradas de terreno cuando encontraron un depósito de varias libras de oro. Dicha sociedad tenía un terreno aurífero para lavar más de 5000 varas cuadradas, y en el que estaba sin preparar en el resto de la Cañada podían disponer de 24.000 varas.

Otro de los ricos yacimientos de oro eran los celebres «aventaderos» del Cerro del Valle, desde donde el precioso metal se extraía fácilmente por encontrarse a dos varas de profundidad. También de las arenas auríferas del río La Carpa se sacaban buenos beneficios, y en general de todos los arroyos de la región.

Según el informe que sobre el estado de la minería en San Luis elevó en 1869 al gobierno nacional el entonces inspector de minas F. Ignacio Richard, había en explotación 4 minas de oro, 2 de cobre, 28 lavaderos de oro, 1 horno de fundición para el cobre en La Florida y un trapiche en Carolina para moler y amalgamar los minerales de oro. Este trabajo lo realizaban 244 operarios, habiendo invertido un capital de 39.500 pesos, pero los rendimientos del año 1868-9 fueron 1866 onzas de oro tasadas en 26.000 pesos.

El señor Richard se manifiesta con mucho entusiasmo y optimismo

en el porvenir de los lavaderos de Cañada Honda cuando hace el cálculo siguiente : « Tomando la extensión de la Cañada, todavía virgen en 58 cuadras de largo por 25 varas término medio de ancho, en la parte donde pinta el oro ; y el lecho o capa aurífera en una vara, término medio de grosor, tenemos 217.500 varas cúbicas, que calculando según su peso específico, en 30 quintales por vara cúbica, resulta 6.525.000 quintales, los cuales reducidos a cajones de 64 quintales cada uno dan 101.953, a 1/2 onza por cajón dan 50.970 onzas, las que por su baja ley (0,720 milésimos) sólo se puede calcular en 13 pesos fuertes la onza, produciendo un valor total de 662.688 pesos fuertes. »

Este cálculo era fantástico porque no es tan grande la extensión que abarcan las ricas tierras auríferas, las cuales habían sido ya bastante explotadas, y tampoco se tiene en cuenta lo que costaría la enorme remoción y lavado de las tierras. Él sabía bien, porque lo dice en el mismo informe, lo que el negocio podía producir, cuando asegura que el señor Morales en seis años de trabajo solamente había sacado 1600 onzas de oro con un gasto de 13.000 pesos. Tomando como base los 13 pesos por onza se tiene 20.800 pesos, menos 13.000 de gasto resta 7800, la cual no es ganancia apreciable en seis años de labor.

La mina más importante de Carolina la siguió explotando la empresa Schmitd y Compañía, la cual había establecido el trapiche. Esta maquinaria, según el mismo Richard, molía 25 quintales de mineral por día, haciendo pasar las arenas por una tela sumamente fina como de 2500 agujeros por pulgada cuadrada. Cada semana o antes, según la riqueza del mineral, se sacaban las rejillas de los esluces y se notaba que casi todo el oro quedaba en las primeras 4 varas del canal enseguida del trapiche.

Como el oro se encontraba muy entreverado con piritas de hierro toda esta masa se volvía a echar al trapiche mezclada con azogue para amalgamarla. El oro que se obtenía era de una ley igual a 835 milésimos o sea de 20 quilates.

En 1871 tomó mayor impulso el laboreo de minas en esta localidad, bajo la dirección del ingeniero Jermán Avé Lallemant, quien trabajó el socavón de Jiménez en el cerro Rico. Poco después el señor Lallemant vendía sus derechos, y se formó entonces la empresa Schimitd Tredelenbruz y Compañia, la cual fracasó por la deficiencia técnica y administrativa.

En 1872 fué nombrado el perito R. de la Sierra para inspeccionar la región minera y aconsejar los medios para estimular esta indus-



Lavaderos de Cañada Honda

tria. En su visita al segundo y quinto departamento de la provincia, menciona ligeramente los minerales de cobre y plata en Talita, Cautana, Angelita, Maromas y la Sala. Refiriéndose a esta última, dice que había dado 1500 marcos de plata por cajón de mineral. Probablemente se trató de alguna veta o porción muy rica y poco abundante porque los trabajos fueron suspendidos casi enseguida.

Por otra parte, don David Levinsgtone informa que la mina Angelita, de su pertenencia, le había producido 100 quintales de cobre. Este mineral daba del 10 al 70 por ciento de cobre y 1 marco de plata por cada quintal de cobre.

El minero de la Sierra visitó también los lavaderos de Cañada Honda, Maray y Tierras Negras, a las cuales llama Pequeña California. Estos últimos lavaderos eran trabajados por Morales, que con 12 peones sacaba un promedio de 2 a 3 onzas de oro por día. De este sitio se extrajeron pepitas de oro de varias onzas de peso.

Ocupándose nuestro inspector del porvenir de estos yacimientos auríferos, llega a las mismas conclusiones fantásticas de Richard como si se hubiera inspirado en su novelesco informe sobre nuestra riqueza minera.

Por entonces se continuaba el trabajo en Carolina, explotándose la mina Buena Esperanza de la compañía Schmitd, la cual seguía produciendo de 2 a 3 onzas de oro por cajón de mineral. Otras labores, en ese mismo lugar, eran las que dirigía el ingeniero Lallemant; los de Cerrillos explotados por Bravo y después por Clark y Compañía; cerro de los Pájaros y en la Estancia y en otros lugares, pero con beneficios muy reducidos.

Al norte de Carolina, el yacimiento explotado por Bravo produjo superficialmente mucho oro, al extremo de que no había allí quien pudiera comprarlo de entre los comerciantes y especuladores con el precioso metal; pero a los pocos metros de profundidad se agotó el rico criadero.

Desde 1873 a 1877 fueron trabajadas varias minas en San Francisco y San Martín por Taaf y Compañía. También se explotó el mineral del Cerro Negro, situado en el origen de Cañada Honda. En esa zona abundaban las vetas auríferas y se hicieron famosos los ricos «aventaderos» de las faldas del cerro. En 1878, según el ingeniero Lallemant, se hallaron en el Rincón de Vergara pepitas hasta de 30 gramos. Estos yacimientos los benefició el señor Federico Nell.

La necesidad de tener hornos modernos de fundición decidió a don

Enrique Wileman a solicitar en 1878 un privilegio por nueve años para establecerlos en el quinto y sexto departamento. Aunque la concesión le fué acordada en condiciones ventajosas nunca llegó a construirlos.

En 1880 se trabajaban además los minerales de Cerrillos Blancos por la empresa Clark y Compañía, y se otorgaron otras concesiones a los señores Lasage, Olses y Lallemant; sin embargo, se hacía sentir la decadencia de las minas, debido principalmente a la falta de capital para emprender trabajos en grande escala, como los que eran necesarios realizar. No obstante tan serio inconveniente continuaron las labores modestas a fin de no abandonar totalmente el laboreo.

En 1881 la Legislatura concedió al doctor Wenceslao Escalante el derecho de explorar, estudiar y explotar los yacimientos metalíferos de cualquier especie que existieran en el departamento San Martín. Se le acordaba este privilegio por el término de siete años, no pudiendo ninguna otra persona, sin su consentimiento, denunciar explorar o explotar minas en dicho departamento.

Durante el tiempo establecido, el doctor Escalante sería considerado poseedor legal de los yacimientos metalíferos sin estar obligado a observar las disposicione sobre amparo, operarios, clase de trabajo y demás requisitos establecidos por las ordenanzas para conservar la propiedad de las minas.

Terminado los estudios previos debía presentar un informe especificando las minas o yacimientos que hubiera explorado y se propusiera trabajar, mencionando su extensión, linderos y clase de minerales a fin verificar las mensuras respectivas sin las limitaciones de las ordenanzas y otorgarle los títulos definitivos de propiedad.

El concesionario se obligaba a introducir un capital de 100.000 pesos fuertes, dos años después de otorgada la concesion, a pagar las patentes correspondientes según la ley de minas y además una contribución anual de 200 pesos por todo el tiempo que durase este privilegio.

Esta empresa estuvo bajo la dirección técnica del ingeniero Eduardo Aguirre. Al año siguiente se le acordó una concesion igual para todo el sexto departamento o Santa Rosa. Tomó cierto impulso la minería en San Martín, particularmente, donde fueron explotados muchos yacimientos y el muy importante de Fortuna. Los minerales de galena argentífera fueron fundidos en el Tatita a 20 kilometros al norte de la mina Fortuna.



Usina del mineral de los Cóndores

Fuera de esta zona limitada de trabajos y de los datos que publicó el ingeniero Aguirre en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* el año 1880 ,no queda otro recuerdo ni la Provincia recibió ningún otro beneficio de aquella aparatosa empresa, cuyos compromisos nadie se encargó de hacer cumplir.

En 1882 se acordaron otras dos concesiones análogas a las del doctor Escalante: a Mauricio Morales para explotar las minas del segundo departamento (Saladillo) y a Ricardo Napp las del séptimo departamento (San Francisco). Este último comenzó por trabajar la mina de cobre aurífero del Rincón, y poco después extendió su acción a otros yacimientos, pero pronto se suspendieron los trabajos. Por ese tiempo Mr. Enrique Wileman compró las minas Buena Esperanza y Extensión, con cuya base formó la sociedad The West Argentine Gold y Compañía, la que tuvo un capital de 250.000 pesos fuertes, que después fué ampliado a 750.00. Ha sido la compañía más importante y la que realizó trabajos más serios en la Carolina. La explotación se hacía por un socavón de 350 metros de longitud, transportándose los materiales por un decauville de un kilómetro de vía. El material se trituraba con diez pisones, movidos por una máquina de vapor de 16 caballos de fuerza. El molino podía beneficiar 350 toneladas de mineral por mes.

En algunas vetas se obtuvieron hasta 27 onzas de oro puro por tonelada y en otras era de una onza y menos. En 20 meses de trabajo se recogió 4188 onzas de oro. El rendimiento permitió devolver 62.000 libras pero habiendo escaseado el mineral y teniendo el enorme gasto de 16.000 pesos mensuales, la empresa no pudo resistir y abandonó los trabajos y sus instalaciones.

En cuanto a los lavaderos de Cañada Honda, el señor Morales vendió sus derechos en 1888 a la Central Argentine Gold Fields Limitada, la misma que trabajó también en Carolina. Esta empresa instaló una maquinaria muy completa para el beneficio de sus minerales por medio de la cianuración, pero en 1898 suspendió sus trabajos. Le sucedió la sociedad Melloro Makintosh y Compañía, la cual recogió en 15 meses de labores unos 6009 gramos de oro. Posteriormente disminuyó mucho el beneficio y arrendaron los lavaderos a Nicholson. Allí encontré a su viuda, la cual compraba el oro que se sacaba de los lavaderos, y presencié la interesante faena practicada por unas mujeres, las cuales tuvieron bastante suerte en sus afanes. Esta búsqueda en las arenas auríferas es una verdadera loteria.

En 1895 fueron descubiertas las canteras de mármol verde o el

llamado ónix-mármol de San Luis en el cerrillo Pila, a 30 kilómetros al noroeste de la estación La Toma. Estos yacimientos están comprendidos en la estancia de Santa Isabel, sobre el arroyo del Pantano. Fueron explotados primerameate por Moreno, Cadret y Compañía y después por Eudeiza, Olmos y Astigueta. Hasta 1907 se había exportado a Francia 4500 toneladas, sin contar lo que se empleaba en el país. Los hermanos L'Oisseau han trabajado últimamente esta hermosa roca con excelentes resultados. Durante varios años han exportado para Amberes unos 200.000 kilos por año. También ha tenido mucha aceptación en el Brasil. En la actualidad trabaja las canteras la Compañía de Onix Argentino, y la producción media es de unas 700 toneladas por año, pero podría ser mayor porque las canteras son aún ricas.

En 1897 se descubrieron las minas de wolfram llamada de los Cóndores. Han sido los yacimientos más ricos que se han encontrado en el país (1). Las minas están situadas a 10 kilómetros al oeste de Dolores (estación Concarán) sobre el río de las Cañas, afluente del Conlara. Los señores Aguirre y Compañía obtuvieron la concesión de 18 hectáreas, la cual vendieron a la casa Herwing del Rosario. Para su explotación se reunieron capitales alemanes fundándose la Hansa Sociedad de Minas. La empresa empleó fuertes sumas en instalar una poderosa usina de concentración, en buenos edificios, talleres y medios de transportes. La compañía obtuvo poco después otras pertenencias y adquirió las minas de San Román y el Pantano cerca de Carolina.

En 1914, cuando la visité tenía 220 operarios, casi 2 kilómetros de túneles de profundidad variable entre 25 y 50 metros, pero un pozo había alcanzado 130 metros de profundidad. La maquinaria podía moler 170 toneladas de mineral cada 24 horas, obteniendo el 1, 2 y 3 por ciento de metal. La exportación media de los años anteriores había sido de 600 a 700 toneladas de mineral reducido a la ley de 65 por ciento de ácido túngstico. Ha sido tan rico el yacimiento que en los cruces de las vetas principales se ha encontrado masas de mineral casi puro de 1, 2, 5 y hasta de 13 toneladas.

Hasta el año 1910 se había exportado unas 1600 toneladas de mineral. El precio que en 1907 era de 55 marcos la unidad y aunque posteriormente bajo mucho, subió de golpe durante la guerra europea

(1) El wolfram fué hallado por primera vez en Socorcora por el ingeniero Lallemant.

hasta 40 pesos oro la unidad o sea unos 6356 pesos moneda nacional la tonelada.

Este mineral era acaparado antes de la guerra para las fundiciones de Hamburgo, pero durante el terrible conflicto se llevó a Inglaterra y a los Estados Unidos.

La Compañía Hansa ha realizado un espléndido negocio, pero sus beneficios han sido escasos y poco estables para la Provincia.

Las minas se han abandonado, la usina ha sido llevada y las ruinas reemplazan ahora lo que fué un centro de gran actividad económica.

En estos últimos tiempos merece citarse también la Compañía de Minas de Intiguasi, la cual hizo la instalación de una hermosa usina en Santo Domingo para beneficiar los minerales de oro de este lugar. y de la mina Rica de Cañada Honda. Actualmente se han paralizado los trabajos y se ha desmontado la usina porque el mineral no ha dado los rendimientos con que alucinaron los primeros trabajos.

Finalmente son muchos y ricos los yacimientos de wolfram y de scheelita encontrados y explotados en La Florida, Morro, cerro del Rosario, San Martín, Carolina y en otros lugares, los cuales pueden ser trabajados aún con buenos resultados.

Fuera de los minerales que se han mencionado se han explotado también el cobre de Virorco, el manganeso de San Francisco y la galena de Talitu. Debo citar por último las caleras del Morro, Estanzuela, Narchel y Gigante, que han sido trabajadas desde los tiempos más antiguos; la mica de la Toma y Cerros Largos, el yeso del Alto Pencoso y la sal de la laguna Bebedero.

Las concesiones mineras desde 1872 a 1888 fueron 66 y hasta 1908 las solicitudes y concesiones llegaron a 180. Desde 1910 a la fecha se han agregado unas 50 concesiones más, predominando las de wolfram y scheelita, le siguen las de galena y últimamente las de hierro de Intiguasi.

En los primeros tiempos sólo se explotaron los minerales de oro y plata, posteriormente el cobre y el plomo, y en los últimos 20 años tomó gran impulso la explotación de los minerales del tunsgteno y el ónix-mármol.

Actualmente adquiere bastante importancia la explotación de la sal, cal, mica, yeso, feldespato, cuarzo y granito.

La Provincia está dividida en dos grandes distritos mineros: el de Carolina y los Cóndores. El primero comprende la parte serrana de los departamentos de la Capital, Belgrano y todo el de Pringles; el

segundo abarca los departamentos Chacabuco, Junín, San Matín y la parte serrana de Ayacucho.

Tales han sido los principales trabajos y yacimientos en la provincia, fuera de cien otras pequeñas explotaciones y ensayos con resultados más s menos satisfactorios.

Nuestro suelo todavía ofrece un buen porvenir a la industria minera argentina.

MOVIMIENTO DE AGUA POR CANALES Y TUBOS

Y CÁLCULO DE ELLOS (*)

POR EL INGº OTTOMAR SCHMIEDEL
Profesor de la Facultad de Agricultura en Corrientes

Un rol importante en el estudio del proyecto para una instalación de riego corresponde a los canales. Estudio, proyecto y ejecución de las grandes arterias artificiales necesarias para la distribución del agua en un distrito extenso a regar incumbe, principalmente, como se comprende, al ingeniero civil. Al ingeniero agronomo deben interesar, esencialmente, aquellos casos en que una fuente natural de agua — un arroyo, por ejemplo — cerca de la chacra, o en ella misma, ofreciera la posibilidad de utilizar su agua.

También en este caso es de suma importancia estudiar cuidadosamente el problema del canal de alimentación, desde el punto de la toma de agua hasta las derivaciones en el campo, pues un estudio exacto del canal y de las posibles variaciones, que se presentan eventualmente por cuestiones de la topografía, puede influir sobre puntos primordiales del proyecto, como, por ejemplo, sobre la misma construcción o instalación de la toma de agua.

Mientras que en ciertos casos no queda duda alguna, por la diferencia de los niveles, sobre si debe recurrirse a la construcción de un dique nivelador o si es necesario instalar máquinas para elevar el agua mecánicamente y conducirla al canal de alimentación, en otros

(*) En el presente artículo se desarrollan fórmulas simplificadas para el cálculo de los canales, a fin de reducir a un mínimo el cálculo por tanteos.

casos, la decisión definitiva, referente al sistema a elegir, depende del estudio del canal.

Averigüemos, pues, detenidamente, las condiciones de su ejecución. El movimiento del agua en los conductos inclinados sucede por el efecto de la gravitación, rigiendo, en consecuencia, como fórmula fundamental para este movimiento, la misma que se desarrolla para la caída de un cuerpo.

Un cuerpo que inicia la caída vertical sin velocidad inicial, alcanza al final de la altura de caída h una velocidad v, que resulta de la fórmula

$$v^2 = 2gh,$$

en que g representa el valor de la aceleración terrestre, o sea :

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}.$$

Ella es el efecto de la continua acción del peso del cuerpo.

En el sentido de la mecánica racional, g es el cuociente de la fuerza de acción por la masa del cuerpo, es decir :

$$g = \frac{\text{peso}}{\text{masa}} = \frac{P}{M}.$$

Luego, resulta :

$$v^2 = 2gh = 2 \cdot \frac{P}{M} \cdot h.$$

Ahora bien, sobre el agua en el canal obra en sentido contrario al movimiento el frotamiento que se produce permanentemente a lo largo de las paredes, de modo que resulta, simplemente, una reducción de la fuerza de acción. La fórmula básica del movimiento de agua en un canal tiene, pues, la forma :

$$v^2 = 2 \frac{\alpha P}{M} h,$$

en que α significa un coeficiente menor que 1.

Podemos presentar este coeficiente en otra forma. Él debe ser un producto, en que aparece la influencia de toda la superficie bañada en proporción lineal indirecta y la influencia del curso de agua, o sea, de la sección de la vena líquida en proporción lineal directa. Además, debe contener un coeficiente relacionado al frotamiento, a la naturaleza de las paredes, etc.

Siendo l el largo del canal, p el perímetro bañado (mojado), S la sección de la vena líquida y δ el coeficiente mencionado, podemos, en consecuencia, establecer :

$$\alpha = \delta \frac{S}{p \,.\, l},$$

y obtendremos :

$$v^2 = 2 \,.\, \delta \cdot \frac{S}{p \,.\, l} \cdot \frac{P}{M} \cdot h = 2 \,.\, \delta \cdot \frac{S}{p \,.\, l} \cdot g \,.\, h.$$

Siendo h la diferencia de niveles que corresponde al largo l del canal, resulta :

$$\frac{h}{l} = i = \text{declive o pendiente del canal.}$$

El cuociente $\frac{S}{p}$ es, generalmente, llamado *radio medio* y denominado con R, de modo que :

$$v^2 = 2\delta \,.\, g \cdot \frac{S}{p} \cdot \frac{h}{l} = 2 \,.\, \delta \,.\, g \,.\, R \,.\, i;$$

$$v = \sqrt{2 \,.\, \delta \,.\, g \,.\, R \,.\, i}.$$

Substituyendo

$$\sqrt{2 \,.\, \delta \,.\, g} = \beta,$$

se nos presenta la expresión en la forma :

$$v = \beta \sqrt{R \,.\, i}.$$

Es la fórmula que generalmente se usa para el cálculo de los canales.

M. Bazin y Ganguillet-Kutter determinaron, por muchos ensayos para los diferentes casos que se presentan en la práctica, los correspondientes valores del coeficiente β, estableciendo M. Bazin, la fórmula :

$$\beta = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

mientras Ganguillet-Kutter dan :

$$\beta = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{i}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}}.$$

Los valores γ (Bazin) y n (Ganguillet-Kutter) dependen del carácter de las paredes, es decir, de su rugosidad.

Vemos de las fórmulas que tanto M. Bazin como también Ganguillet-Kutter, encuentran una influencia del radio medio R sobre el valor β, y Ganguillet-Kutter cree, además, poder constatar otra de la pendiente i sobre el mismo. El cuadro siguiente da para diferentes casos los valores γ, n y $\frac{1}{n}$.

Constitución de las paredes	Bazin γ	Ganguillet-Kutter n	$\frac{1}{n}$
Paredes muy lisas (cemento, madera lisa)	0,06	0,010	100
Paredes de tablas (sin cepillar)	0,16	0,012	83
Paredes de piedras talladas y ladrillos	0,46	0,013	77
Paredes poco uniformes; mampostería de mortero	0,85	0,017	59
Paredes de tierra común	1,30	0,025	40
Paredes de tierra, lecho con grava, plantas acuáticas	1,75	0,030	33
		0,035	29

Siedek-Viena declara, a base de nuevos ensayos que hizo, la fórmula de M. Bazin mas exacta que la de Ganguillet-Kutter. Elegimos, por consiguiente, aquélla para nuestros siguientes desarrollos, y tenemos :

$$v = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \cdot \sqrt{R \cdot i}. \qquad (1)$$

Conocida ahora o aceptada la pendiente i del canal y admitida cierta velocidad del agua, la fórmula (1) permite calcular el radio medio R.

En efecto, existen diagramas que presentan, gráficamente, para diferentes velocidades v las curvas correspondientes para R, resultando el radio medio dependiente de la variable i, pudiéndose aplicar una simple interpolación en el caso que la velocidad admitida no coincidiera exactamente con una de las que corresponden a las curvas.

Estos diagramas, muy útiles por cierto, deben usarse, sin embargo, con cierto criterio, pues las curvas demuestran para pequeñas pendientes una convergencia muy poco pronunciada, de modo que existe la posibilidad de errar tanto en la medicion de R como en la interpo

lación. Las pequeñas pendientes de 0,05 a 0,20 por mil tenemos que considerarlas frecuentemente, tratándose de la ejecución de canales en tierras de arcillas blandas y de arenas.

Admitimos, desde luego, que un pequeño error en el valor R no tiene una importancia esencial, pero teniendo en cuenta que también el coeficiente γ puede diferir en la realidad algo del valor introducido en el cálculo conviene, indudablemente, reducir en todo lo posible las fuentes de errores y recurrir, en los casos indicados, al cálculo, para conseguir un resultado, al menos teóricamente, exacto.

Los diferentes autores, al calcular los canales con la fórmula de Bazin, proceden a manera de tanteo, aceptando provisionalmente un valor para el radio medio R, corrigiéndole después, volviendo a calcular, etc.

No existe la necesidad de calcular a manera de tanteo, por cuanto la fórmula de Bazin no presenta, con respecto a R, sino el carácter cuadrático, cuya solución no ofrece, por consiguiente, ninguna dificultad. Sólo cuando se tratara de determinar para una pendiente dada la sección absolutamente óptima, convendría recurrir al método de aproximación, llegando así más rápidamente al resultado.

Transformamos la fórmula dada como sigue :

$$v = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \cdot \sqrt{R \cdot i} = \frac{87\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \gamma} \cdot \sqrt{R \cdot i} = 87 \cdot \sqrt{i} \cdot \frac{R}{\sqrt{R} + \gamma}$$

$$v(\sqrt{R} + \gamma) = 87 \cdot \sqrt{i} \cdot R$$

$$v \cdot \sqrt{R} = 87 \cdot \sqrt{i} \cdot R - v \cdot \gamma$$

$$v^2 \cdot R = 87^2 \cdot i \cdot R^2 - 2 \cdot 87 \cdot \sqrt{i} \cdot v \cdot \gamma \cdot R + v^2 \cdot \gamma^2$$

$$0 = R^2 - \frac{2 \cdot 87 \cdot \sqrt{i} \cdot v \cdot \gamma + v^2}{87^2 \cdot i} \cdot R + \frac{v^2 \cdot \gamma^2}{87^2 \cdot i}.$$

La solución es :

$$R = \frac{2 \cdot 87 \cdot \sqrt{i} \cdot v \cdot \gamma + v^2}{2 \cdot 87^2 \cdot i} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 87 \cdot \sqrt{i} \cdot v \cdot \gamma + v^2}{2 \cdot 87^2 \cdot i}\right)^2 - \frac{v^2 \cdot \gamma^2}{87^2 \cdot i}}.$$

Poniendo

$$2 \cdot 87 \cdot \gamma = \varepsilon$$

y

$$\frac{87}{\gamma} = s.$$

podemos dar al resultado la forma general :

$$R = v\,\frac{\sqrt{i} + \frac{v}{z}}{s\,.\,i}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{i}{\left(\sqrt{i} + \frac{v}{z}\right)^2}}\right]. \qquad (2)$$

Para canales en tierra común es $\gamma = 1{,}3$; luego :

$$z = 2\,.\,87\,.\,\gamma = 226 \simeq \frac{900}{4};$$

$$s = \frac{87}{\gamma} = 67 \simeq \frac{2}{3} \cdot 100.$$

La fórmula para R acepta, en este caso, la forma relativamente sencilla :

$$R = v \cdot \frac{900\sqrt{i} + 4v}{60000\,.\,i}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{50000\,.\,i}{50000\,.\,i + 450\,.\,v\,.\sqrt{i} + v^2}}\right]. \qquad (2)$$

Consideramos ahora la sección del canal o, mejor dicho, de la vena líquida, que corresponde a valores conocidos de v y R.

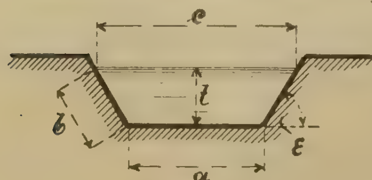


Figura 1

Desde luego, tenemos, de acuerdo con las indicaciones de la figura 1 :

$$S = \frac{q}{v} = \frac{a + e}{2} \cdot t,$$

significando q la cantidad de agua que debe suministrar el canal por segundo.

$$\frac{S}{p} = R.$$

Luego :

$$\frac{S}{R} = p = a + 2b = a + \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon};$$

$$a = p - \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon} = \frac{S}{R} - \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon} = \frac{q}{v\,.\,R} - \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon};$$

$$e = a + \frac{2t}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{q}{v\,.\,R} - \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon} + \frac{2t}{\operatorname{tg} \varepsilon};$$

$$S = \frac{q}{v} = \frac{a + c}{2} \cdot t = \frac{\frac{q}{vR} - \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon} + \frac{q}{vR} - \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon} + \frac{2t}{\operatorname{tg} \varepsilon}}{2} \cdot t;$$

$$\frac{q}{v} = \left(\frac{q}{vR} - \frac{2 \cdot t}{\operatorname{sen} \varepsilon} + \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) \cdot t = \left(\frac{q}{vR} - t \cdot \frac{2 - \cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon}\right) \cdot t;$$

$$\frac{q}{v} = \frac{q}{v \cdot R} \cdot t - \frac{2 - \cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon} \cdot t^2;$$

$$0 = t^2 - \frac{q}{v \cdot R} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 - \cos \varepsilon} \cdot t + \frac{q}{v} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 - \cos \varepsilon};$$

$$t = \frac{q}{2 \cdot v \cdot R} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 - \cos \varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2 \cdot v \cdot R} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 - \cos \varepsilon}\right)^2 - \frac{q}{v} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 - \cos \varepsilon}}.$$

Substituyendo

$$\frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 (2 - \cos \varepsilon)} = A$$

obtenemos la forma :

$$t = \frac{q}{v \cdot R} \cdot A \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 \cdot R^2 \cdot v}{q \cdot A}}\right]. \qquad (3)$$

Dada la cantidad q de agua a conducir por un canal de cierta pendiente i, y aceptada la velocidad v con que el agua debe correr, las fórmulas (2) y (3) dan las dimensiones del canal, pues una vez determinada la profundidad t, las dimensiones a y b no son sino funciones de t y ε.

En el caso que la raíz en la fórmula (3) diera un valor imaginario, tendría que reducirse el valor v de la velocidad del agua, hasta el valor que se obtiene de la ecuación

$$1 - \frac{2 \cdot R^2 \cdot v}{q \cdot A} = 0$$

y que será el máximo a obtener en este caso.

Resulta :

$$v_{\text{máx}} = \frac{A \cdot q}{2R^2},$$

puesto que para esta velocidad la cantidad subradical es igual a cero.

Una vez calculada la velocidad v a base de la fórmula (1), con un valor R aceptado, o calculado el valor R según la fórmula (2) con una velocidad v aceptada, conviene hacer la prueba sobre si puede aumen-

tarse la velocidad o si es necesario reducirla a su posible valor máximo, el que es, como se comprende, el valor más racional, puesto que a la velocidad máxima corresponde la sección mínima del canal en las condiciones establecidas.

Ocurre con frecuencia que en los casos de los canales de riego debe atenerse a una profundidad dada. La fórmula (3) sirve, en este caso, para el cálculo de R, pues resulta :

$$\frac{t \, . \, v \, . \, R}{q \, . \, A} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 \, . \, R^2 \, . \, v}{q \, . \, A}} \, ;$$

$$\left(\frac{t \, . \, v \, . \, R}{q \, . \, A} - 1\right)^2 = 1 - \frac{2R^2 \, . \, v}{q \, . \, A} \, ;$$

$$R^2 \left(\frac{t \, . \, v}{q \, . \, A}\right)^2 - R \cdot \frac{2 \, . \, t \, . \, v}{q \, . \, A} + 1 = 1 - \frac{2R^2 \, . \, v}{q \, . \, A} \, ;$$

$$R^2 \left(\frac{t^2 \, . \, v^2}{q \, . \, A} + 2 \, . \, v\right) - R \, . \, 2 \, . \, t \, . \, v = 0 \, ;$$

$$R = \frac{2 \, . \, t \, . \, v \, . \, q \, . \, A}{t^2 \, . \, v^2 + 2 \, . \, v \, . \, q \, . \, A} \, . \qquad (4)$$

Conocidos R y v puede calcularse por la fórmula (1) la pendiente i que debe darse al canal, resultando :

$$i = \frac{v^2 (\sqrt{R} + \gamma)^2}{87^2 \, . \, R^2} \, . \qquad (5)$$

Analicemos ahora las condiciones generales para la ejecucion racional de la sección de un canal. Partimos de la fórmula fundamental :

$$v = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \cdot \sqrt{R \, . \, i} = 87 \, . \sqrt{i} \cdot \frac{R}{\sqrt{R} + \gamma} \, .$$

De aquí resulta :

$$\frac{dv}{dR} = 87 \, . \sqrt{i} \cdot \frac{\sqrt{R} + \gamma - R \cdot \frac{1}{2\sqrt{R}}}{(\sqrt{R} + \gamma)^2} = \frac{\sqrt{R} + 2 \, . \, \gamma}{2 \, (\sqrt{R} + \gamma)^2} \, .$$

El valor positivo de la derivada comprueba que del aumento de R resulta un aumento de v.

La sección óptima la tenemos luego en aquella para la cual

$$R = \frac{S}{p}$$

alcanza su valor máximo, por cuanto con R llega también c al máximo.

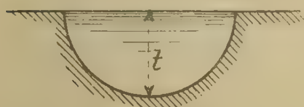


Figura 2

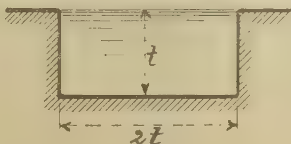


Figura 3

Resalta inmediatamente a la vista que la sección semicircular ofrece la menor extensión del perímetro bañado, resultando :

$$R_{máx} = \frac{\frac{t^2 . \pi}{2}}{t . \pi} = \frac{t}{2}.$$

Para la sección rectangular $2 . t \times t$, se obtiene igualmente :

$$R_{máx} = \frac{2 . t^2}{4t} = \frac{t}{2}.$$

Consideramos ahora una sección rectangular $a_m \times t$ (fig. 4) y hacemos girar los lados verticales al rededor de los ejes cuyas trazas son los

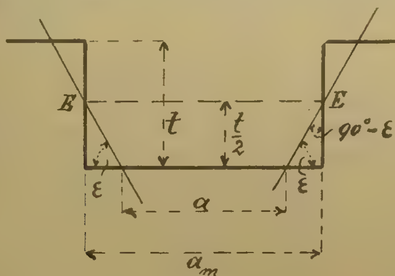


Figura 4

puntos E a media altura del fondo, de modo que se transforma la sección rectangular en un trapecio.

El área de la sección queda constante

$$S = a_m \, . \, t,$$

pero el perímetro bañado varía con el ángulo ε de los taludes.

Para el trapecio tenemos :

$$p = a + 4 \frac{\frac{t}{2}}{\operatorname{sen} \varepsilon} = a + \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon}$$

y

$$a = a_m - 2 \frac{\frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \varepsilon} = a_m - \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon};$$

$$p = a_m - \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon} + \frac{2t}{\operatorname{sen} \varepsilon} = a_m + t \cdot \frac{2 - \cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon}.$$

El radio medio

$$R = \frac{S}{p} = \frac{a_m \, . \, t}{a_m + t \cdot \frac{2 - \cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon}}$$

alcanza su valor máximo cuando

$$p = a_m + t \cdot \frac{2 - \cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon}$$

pasa por su valor mínimo.

Resulta :

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = t \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \varepsilon - (2 - \cos \varepsilon) \, . \cos \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} = t \cdot \frac{1 - 2 \, . \cos \varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon}.$$

Para

$$1 - 2 \cos \varepsilon = 0$$

tenemos, naturalmente, también :

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = 0$$

lo que sucede, por consiguiente, en el caso de

$$1 = 2 \, . \cos \varepsilon;$$

$$\cos \varepsilon = 0{,}500;$$

$$\varepsilon = 60°.$$

La segunda derivada es

$$\frac{d^2p}{d\varepsilon^2} = t \cdot \frac{2 \cdot \text{sen}^3 \varepsilon - (1 - 2 \cdot \cos \varepsilon) \cdot 2 \cdot \text{sen}\, \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\text{sen}^4 \varepsilon}$$

$$= 2t \cdot \frac{\text{sen}^2 \varepsilon - (1 - 2 \cdot \cos \varepsilon) \cdot \cos \varepsilon}{\text{sen}^3 \varepsilon}.$$

Para $\varepsilon = 60°$, $\cos \varepsilon = 0{,}500$ y $\text{sen}\, \varepsilon = 0{,}866$, resultando :

$$\frac{d^2p}{d\varepsilon^2} = 2 \cdot t \cdot \frac{0{,}866^2 - (1 - 2 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}5}{0{,}866^3} = \frac{2t}{0{,}866}.$$

El valor positivo de $\frac{d^2p}{d\varepsilon^2}$ comprueba que el valor p pasa, para $\varepsilon = 60°$, por un mínimo, alcanzando, en este caso, R su valor máximo.

La combinación gráfica con la figura 2 nos hace inmediatamente ver que también el semiexágono (fig. 5) circunscrito al semicírculo

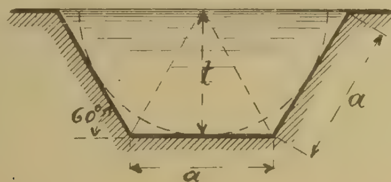


Figura 5

del radio t, es una sección de mínima resistencia para el movimiento del agua. Como para el semicírculo y para el semicuadrado, resulta también para el semiexágono :

$$R_{max} = \frac{3\frac{at}{2}}{3a} = \frac{t}{2}.$$

El desarrollo a base de la figura 4 lo hicimos considerando constantes tanto la profundidad total t del canal como su ancho medio a_m, variando nada más que el ángulo de talud, y llegamos al resultado que, en tales condiciones, conseguimos la sección óptima en el semiexágono.

La sección semicircular exige la ejecución en cemento o en mampostería. La sección semicuadrada requiere revestimiento de los lados y la sección semiexágono sólo podemos admitirla, sin revestimiento, en tierras muy compactas, muy arcillosas, pues sólo éstas nos permiten el corte con taludes de 60°.

Para conseguir fórmulas generales, que contengan el ángulo de talud, diferente según la clase de terreno, tendríamos que considerar variables tanto la profundidad t como el ancho medio a_m y el perímetro p. Esta dificultad desaparece de inmediato si establecemos la condición

$$S = a_m \, . \, t = \text{constante.}$$

En vez de a_m podemos también introducir el ancho a en el fondo (fig. 6). Tenemos luego :

$$S = \left(a + \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) \cdot t$$

y para el perímetro mojado

$$p = a + 2 \cdot \sqrt{t^2 + \frac{t^2}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon}} = a + \frac{2t}{\operatorname{tg} \varepsilon} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1}.$$

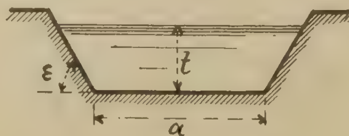


Figura 6

La ecuación para S permite el desarrollo

$$a = \frac{S}{t} - \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}$$

y, por consiguiente, resulta :

$$p = \frac{S}{t} - \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon} + \frac{2t}{\operatorname{tg} \varepsilon} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1}$$

$$= \frac{S}{t} + \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon} \left(2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1\right).$$

La derivada primera es

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{S}{t^2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon} \left(2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1\right)$$

y la segunda :

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = 2 \frac{S}{t^3}.$$

Su valor positivo comprueba que p alcanza un valor mínimo cuando $\frac{dp}{dt}$ se reduce a cero.

Esto sucede en el caso de

$$\frac{S}{t_r^2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon}\left(2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1\right).$$

La profundidad t_r que implica el cumplimiento de esta condición es, por consiguiente, la más racional y la tenemos en

$$t_r = \sqrt{S \cdot \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1}}.$$

Siendo

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1} = \frac{2 - \cos \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon}$$

puede también escribirse :

$$t_r = \sqrt{S \cdot \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 - \cos \varepsilon}}.$$

Para conocer el valor del radio medio que resulta para esta profundidad, ponemos :

$$R = \frac{S}{p} = \frac{\left(a + \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) \cdot t}{a + 2\frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1}} = \frac{\left(\frac{S}{t} - \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon} + \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) \cdot t}{\frac{S}{t} - \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon} + 2\frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1}};$$

$$R = \frac{\frac{S}{t} \cdot t}{\frac{S}{t} + \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}\left(2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1\right)}.$$

Siendo

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon}\left(2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1\right) = \frac{S}{t^2},$$

resulta :

$$R = \frac{S}{\frac{S}{t} + \frac{S}{t^2} \cdot t} = \frac{S}{2 \cdot \frac{S}{t}} = \frac{t}{2}.$$

He aquí la comprobación de que la sección racional está siempre determinada por la condición :

Perímetro mojado = mitad de la profundidad del canal.

para cualquier valor del ángulo del talud.

Substituyéndose en la fórmula desarrollada para la profundidad racional

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1} = \mathrm{B},$$

podemos escribir :

$$t_r = \sqrt{\frac{q}{v}} \cdot \mathrm{B} \tag{6}$$

El cuadro siguiente da para diferentes casos los ángulos correspondientes de talud (valores medios), los valores trigonométricos, A y B.

Constitución de las paredes	ε (valor medio)	tg ε	sen ε	cos ε	A $\frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2(2 - \cos \varepsilon)}$	B $\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1}$
Tierra floja, arenosa	30°	0,577	0,500	0,866	0,221	0,441
Tierra arcillo-arenosa	40	0,839	0,643	0,766	0,261	0,521
Tierra compacta muy arcillosa	55	1,428	0,819	0,574	0,287	0,575
Arcilla pura................	65	2,145	0,906	0,423	0,287	0,575
Revestimiento. Mampostería con mortero	77°5	4,511	0,976	0,216	0,274	0,549

Para canales en terraplén debe reducirse el ángulo de talud de modo que tg ε no alcance sino a $\frac{2}{3}$ de los valores del cuadro, modificándose, correspondientemente, todos los otros valores también.

De la fórmula número (3) dedujimos que la velocidad máxima tendría que satisfacer la condición

$$v_{\text{máx}} = \frac{\mathrm{A}q}{2\mathrm{R}^2}.$$

Para la sección óptima debe ser $\mathrm{R} = \frac{t_r}{2}$ y, por consiguiente :

$$v_{\text{máx}} = \frac{\mathrm{A}q}{2 \cdot t_r^2} \cdot 4 = 2 \cdot \frac{\mathrm{A}q}{t_r^2};$$

$$t_r = \sqrt{\frac{q}{v_{\text{máx}}} \cdot 2\mathrm{A}}.$$

Habíamos puesto

$$\mathrm{A} = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2(2 - \cos \varepsilon)},$$

de modo que resulta :

$$2A = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2 - \cos \varepsilon} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1} = B$$

y, por consiguiente, vemos confirmada la fórmula (6) :

$$t_r = \sqrt{\frac{q}{v_{\text{máx}}} \cdot B},$$

pues a la profundidad racional corresponde, naturalmente, $v_{\text{máx}}$.

Para el ancho racional a_r tenemos :

$$a_r = \frac{S}{t_r} - \frac{t_r}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{q}{v_{\text{máx}} \cdot t_r} - \frac{t_r}{\operatorname{tg} \varepsilon}.$$

De la ecuación

$$\frac{S}{p} = \frac{\left(a_r + \frac{t_r}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) \cdot t_r}{a_r + \frac{2t_r}{\operatorname{tg} \varepsilon} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1}} = \frac{t_r}{2},$$

puede desarrollarse también

$$a_r + \frac{t_r}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{a_r}{2} + \frac{t_r}{\operatorname{tg} \varepsilon} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1}$$

$$a_r = \frac{2t_r}{\operatorname{tg} \varepsilon}\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} - 1\right) = t_r\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right). \tag{7}$$

Las fórmulas desarrolladas permiten resolver cualquier problema que pudiera surgir referente a los canales. Los ejemplos, al final, demuestran la aplicación.

A fin de introducir en los cálculos la velocidad más conveniente que debe admitirse según clase de terreno y pendiente, repetimos los valores que Risler y Wery dan como máximos para el fondo, para evitar excavaciones y erosiones.

	Velocidad límite en el fondo	Pendiente por kilómetro
Arcillas blandas	0,15 m/s	0,045 m
Arenas	0,31	0,136
Gravas	0,61	0,430
Guijarros	0,91	0,570
Piedras en grandes fragmentos.	1,22	1,510
Guijarros aglomerados	1,52	2,115
Rocas blandas	1,83	2,790
Rocas duras	3,05	7,340

La velocidad media puede superar algo los valores indicados.

El límite inferior depende de las substancias que las aguas llevan en suspensión. La velocidad mínima para agua fangosa es de 0,25 metros y para aguas con arena gruesa, 0,50 metros por segundo. Habíamos encontrado que el movimiento del agua en conductos sucede por el efecto de la gravitación y según la fórmula general

$$v = \beta \sqrt{R \cdot i}.$$

La diferencia de los niveles de agua que origina el movimiento la vemos en el factor $i = \frac{h}{l}$, que es para los conductos abiertos, o sea los canales, la pendiente.

Tratándose de la conducción de agua por una tubería o cañería, el factor $i = \frac{h}{l}$ tiene, naturalmente, el mismo significado hidráulico, es decir, h es la diferencia de los niveles piezométricos con respecto a la distancia horizontal l.

$\frac{h}{l} = i$ es, luego, la tangente del ángulo de inclinación de la línea piezométrica con respecto a la horizontal y no tiene nada que ver, como se comprende, con la pendiente de la cañería, que puede variar siguiendo las ondulaciones del terreno.

Llenando el agua toda la sección de los caños del diámetro interior d, resulta :

$$R = \frac{d}{2}$$

y la fórmula fundamental acepta la forma :

$$v = \beta \sqrt{\frac{d}{2} \cdot i} = \frac{\beta}{1.414} \cdot \sqrt{d \cdot i}.$$

Claro es que el coeficiente β para las cañerías no es idéntico con el de los canales, puesto que las condiciones de fricción son otras, debido a la instalación de válvulas, codos, etc., de modo que ponemos mejor

$$\frac{\beta}{1.414} = \gamma_1$$

y tenemos la fórmula básica para el movimiento del agua por tubos y caños en :

$$v = \gamma_1 \cdot \sqrt{d \cdot i}. \qquad (8)$$

Numerosos son los ensayos que se han hecho para determinar el valor del coeficiente η. Es claro que el estado de las cañerías en general, las posibles incrustaciones producidas en el curso de los años, etc., influyen esencialmente sobre el valor η, de modo que no es nada extraño que los diferentes investigadores obtuvieran resultados algo divergentes.

Nos limitamos en el presente trabajo a mencionar los de Darcy, de Frank y de Levy, por cuanto ellos dan valores que, por lo general,

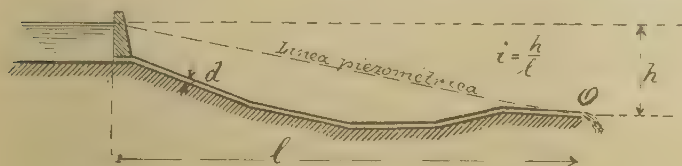


Figura 7

quedan en el medio, más o menos, entre los valores extremos de los otros autores.

Darcy da, para cañerías nuevas :

$$\eta_D = \frac{1}{\sqrt{0{,}001014 + \frac{0{,}000259}{d}}}.$$

Este valor puede ser transformado como sigue :

$$\eta_D = \frac{1}{0{,}032\sqrt{1 + \frac{0{,}000259}{0{,}001014 \, . \, d}}} = \frac{31{,}2}{\sqrt{1 + \frac{0{,}255}{d}}}.$$

Para un diámetro de 5 pulgadas (0,126), resultaría

$$\eta_D = 18.$$

Frank da, para cañerías nuevas :

$$\eta_F = \frac{1}{\sqrt{0{,}000512 + \frac{0{,}000385}{d}}}$$

$$= \frac{1}{22{,}7\sqrt{1 + \frac{0{,}000385}{0{,}000512 \, . \, d}}} = \frac{44}{\sqrt{1 + \frac{0{,}755}{d}}}.$$

Para $d = 0{,}126$ metros, resulta :

$$\gamma_E = 16{,}6.$$

Levy indica, para cañería nueva :

$$\gamma_L = \sqrt{662{,}56 + 468\sqrt{d}},$$

obteniéndose para el mismo diámetro

$$\gamma_L = 28{,}8.$$

El término medio de los tres valores de los diferentes autores da

$$\gamma = 21{,}1.$$

Para cañería vieja recomienda Darcy la multiplicación por

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71,$$

de modo que tendríamos, en este caso,

$$\gamma_D = \sim 13.$$

Frank recomienda, para cañería vieja :

$$\gamma_F = \frac{1}{\sqrt{0{,}000495 + \frac{0{,}000652}{d}}} = \frac{45}{\sqrt{1 + \frac{1{,}315}{d}}},$$

resultando

$$\gamma_F = 13{,}3 \qquad (\text{para } d = 0{,}126 \text{ m}).$$

Levy indica, para este caso :

$$\gamma_L = \sqrt{210{,}125 + 445{,}74\sqrt{d}}$$

que da con $d = 126$ milímetros

$$\gamma_L = 19{,}2.$$

El término medio de los tres valores es

$$\gamma = 15{,}2.$$

Con frecuencia se calcula con la fórmula

$$v = 20\sqrt{d \cdot i}, \tag{8}$$

pero se debe siempre tener en cuenta que se trata, en este caso, sólo de una aproximación, puesto que el coeficiente η de la fórmula (8) varía bastante con el diámetro d.

El cuadro siguiente da el coeficiente η para cañería vieja y nueva, según los tres autores mencionados, y para el diámetro de 4, 6, 8 y 10 pulgadas y, además, para cada caso, el término medio con que conviene calcular.

Diámetro de los caños	Cañería	η según Darcy	η según Frank	η según Levy	η término medio
2″ = 0,051 m....	Nueva	12,8	11,1	27,7	17,2
	Vieja	9,1	8,7	17,7	11,8
4″ = 0,102 m....	Nueva	16,6	15,2	28,5	20,1
	Vieja	11,7	12,1	18,8	14,2
6″ = 0,153 m....	Nueva	19,2	18,0	29,1	22,1
	Vieja	13,6	14,6	19,6	16,0
8″ = 0,204 m....	Nueva	20,8	20,3	29,5	23,3
	Vieja	14,7	16,5	20,3	17,2
10″ = 0,255 m....	Nueva	22,1	22,1	30,0	24,7
	Vieja	15,6	18,1	20,9	18,2
12″ = 0,306 m....	Nueva	23,1	23,7	30,4	25,7
	Vieja	16,3	19,5	21,4	19,1

Se entiende en el precedente cuadro como cañería vieja aquella que tiene incrustaciones.

Para la cantidad de agua que el caño suministra por segundo, tenemos :

$$q = S \cdot v = \frac{d^2\pi}{4} \cdot \eta \cdot \sqrt{d \cdot i}.$$

Por consiguiente

$$q^2 = \eta^2 \cdot i \cdot \frac{d^5\pi^2}{16};$$

$$d^5 = \frac{16q^2}{\pi^2 \cdot i\eta^2};$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{16q^2}{\pi^2 \cdot i \cdot \eta^2}}. \qquad (9)$$

La línea piezométrica, cuya inclinación determina el factor i, no pasa siempre por el orificio O, como lo indica la figura 7. Para demostrarlo nos fijamos en la figura 8.

Tenemos en la figura 8 el esquema de un recipiente R con conducto de salida horizontal y dos tubos de ascensión T_1 y T_2. El orificio O del conducto puede cerrarse con un cierre C.

La línea piezométrica pasa por el centro del orificio, en el caso de la figura 8 *a*, en que todo el orificio está abierto. A medida que cerra-

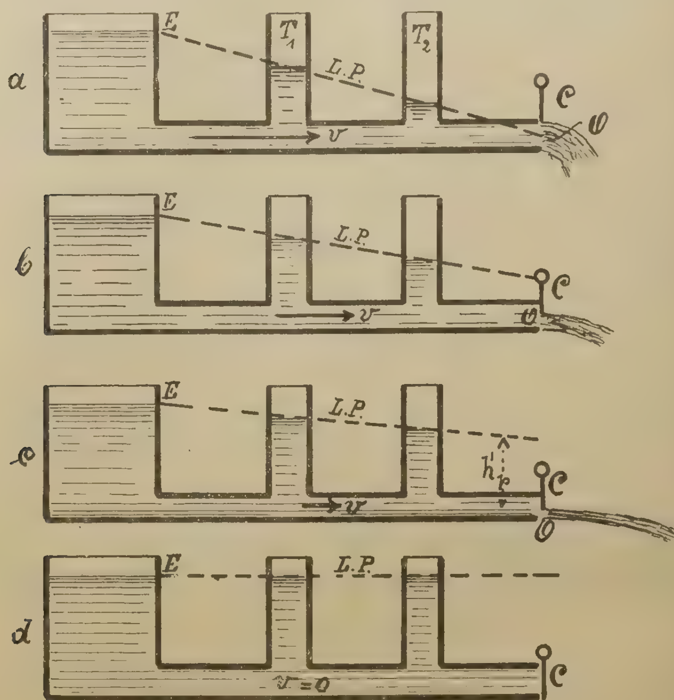


Figura 8

mos la abertura (figs. 8 *b* y *c*) se levanta la línea piezométrica L P, es decir, ella gira al rededor del punto E del nivel de agua en el recipiente B. Al mismo tiempo disminuye la velocidad *v* del agua en el conducto. En el momento en que el orificio O queda completamente cerrado, la línea piezométrica alcanza la posición horizontal, pues tenemos, en este caso (fig. 8 *d*), el principio hidrostático de los tubos comunicantes.

En la práctica, no siempre puede tomarse como línea piezométrica

la línea de comunicación entre el orificio y el nivel de agua en el recipiente, pues esta línea de comunicación puede ser cortada por una elevación del terreno, como lo demuestra claramente la figura 9.

Dada la situación general que presenta la figura 9, el agua pasa, sin duda alguna, sobre la elevación indicada, de modo que tenemos

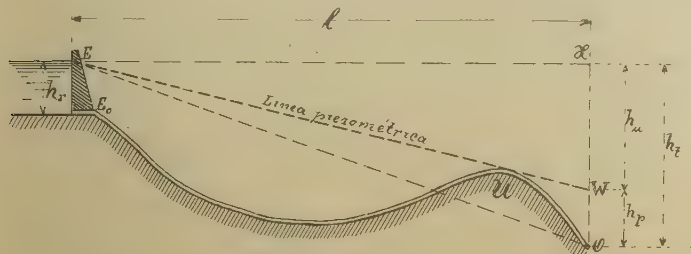


Figura 9

en el punto de culminación U un punto de la línea piezométrica. Ésta tiene, por lo tanto, la dirección EU y su pendiente está dada por

$$i = \frac{h_u}{l}.$$

La altura

$$OW = h_p$$

significa la altura piezométrica y representa el exceso de la presión hidráulica que resta en el lugar del orificio O;

$$OX = h_t$$

es la altura de presión total, la que, sin embargo, sólo existe en el caso del orificio cerrado, cuando rige la ley de la hidrostática. La altura

$$WX = h_u$$

es llamada, por lo general, *pérdida de presión* o *pérdida por fricción* o *altura de fricción*. La denominación «pérdida de presión», que resulta por la comparación con la presión hidrostática, estando cerrado el orificio O, no parece del todo adecuada, por cuanto la línea piezométrica inclinada es propia al estado hidrodinámico y, por cuanto a la mayor pérdida de presión corresponde mayor caudal de agua, lo que parece, a primera vista, un contrasentido. Se debe considerar, sin

embargo, que mayor pérdida de presión significa mayor pendiente de la línea piezométrica. A la mayor pérdida de presión corresponde, como es muy natural, menor exceso de presión en O.

Con frecuencia se deja sin consideración la altura h_r del agua en el recipiente sobre el orificio E_0, puesto que ella resulta variable. En este caso, se hace partir la línea piezométrica del punto E_0.

De las figuras 8 y 9 pueden deducirse dos medios para conseguir en cierto punto del conducto principal, una presión hidráulica determinada h_p' (fig. 8). El primer medio consiste en cerrar parte de las derivaciones existentes, elevándose así la línea piezométrica. El segundo medio consiste en la determinación de una altura piezométrica por el conducto mismo.

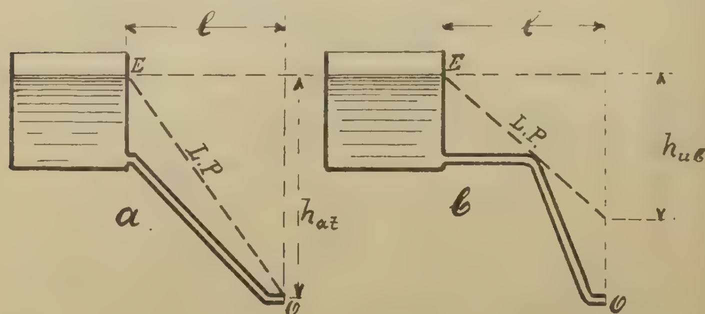


Figura 10

La figura 10 presenta un caso elocuente a este respecto. Suponiendo que el agua en el tubo alcanzara en la instalación (fig. 10 *a*) una velocidad algo grande, la fuerza viva impuesta al agua por esta velocidad obra al cerrar rápidamente la cañería sobre las paredes de ella y puede producir roturas (golpe de agua).

Dándose al conducto la forma de la figura 10 *b*, existe en U un punto de la línea piezométrica y basándose en la escala y proporción en que vemos en la figura 10 las alturas h_{at} y h_{ub} resulta, para este caso, aproximadamente :

$$h_{ta} : h_{ub} = 1 : 0.6.$$

Por consiguiente :

$$\sqrt{i_a} : \sqrt{i_b} = 1 : \sqrt{0.6} = 1 : 0.78.$$

Para el caso presentado habríase reducido, por la disposicion de la cañería, según la figura 10 *b*, la velocidad al 78 por ciento del valor

que resultara según la instalación (fig. 10 *a*). La fuerza viva se habría reducido de acuerdo con el cuadrado de la velocidad al 60 por ciento.

Recapitulación de las fórmulas

a) Fórmula general de Bazin :

$$v = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \cdot \sqrt{R \cdot i}. \qquad (1)$$

(γ para tierra común $= 1,3$).

b) Fórmulas para calcular las dimensiones del canal, aceptada v y dada i :

$$R = v \cdot \frac{\sqrt{i} + \frac{v}{z}}{s \cdot i} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{i}{\left(\sqrt{i} + \frac{v}{z}\right)^2}}\right]; \qquad (2)$$

$$z = 2.87 \cdot \gamma;$$

$$s = \frac{87}{\gamma}.$$

Para $\gamma = 1,3$ resulta :

$$R = v \cdot \frac{900\sqrt{i} + 4v}{60000 \cdot i} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{50000 \cdot i}{50000 \cdot i + 450 \cdot v \cdot \sqrt{i} + v^2}}\right] \qquad (2\,a)$$

$$t = \frac{q}{v \cdot R} \cdot A \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2R^2 v}{q \cdot A}}\right]; \qquad (3)$$

$$a = \frac{S}{t} - \frac{t}{\operatorname{tg} \varepsilon}. \qquad (4)$$

c) Fórmulas a usar para el caso de una profundidad dada del canal :

$$R = \frac{2 \cdot t \cdot v \cdot q \cdot A}{t^2 \cdot v^2 + 2v \cdot q \cdot A} = \frac{2 \cdot t \cdot q \cdot A}{t^2 \cdot v + 2 \cdot q \cdot A}; \qquad (5)$$

$$i = \frac{v^2 \left(\sqrt{R} + \gamma\right)^2}{87^2 \cdot R^2}. \qquad (6)$$

d) Condiciones para la sección racional u óptima :

$$v_{max} = \frac{A \cdot q}{2 \cdot R^2};$$

$$R = \frac{t_r}{2};$$

$$t_r = \sqrt{\frac{q}{v}} \cdot B; \qquad (t_r = t \text{ racional}) \qquad (7)$$

$$a_r = t_r \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) \qquad (a_r = a \text{ racional}). \qquad (8)$$

e) Fórmulas generales para el cálculo de los tubos :

$$v = \gamma_1 \sqrt{d \cdot i}. \qquad (9)$$

Aceptándose para γ_1 el valor 20, resulta :

$$v = 20 \sqrt{d \cdot i} \qquad (9\,a)$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{16 \cdot q^2}{\pi^2 \cdot i \cdot \gamma_1^2}}. \qquad (10)$$

Ejemplos de aplicación

1° *Determínese la sección óptima para un canal de las siguientes condiciones :*

$$q = 1{,}5 \text{ m}^3 \text{ por segundo};$$

$$i = 0{,}0002;$$

$$\varepsilon = 30° \text{ (tierra arenosa)}.$$

La velocidad media en el canal puede superar algo al valor 0,31 metros (según cuadro anterior). Con $v = 0{,}34$ metros, tenemos :

$$R = 0{,}34 \cdot \frac{900 \cdot \sqrt{0{,}0002} + 4 \cdot 0{,}34}{60000 \cdot 0{,}0002} \times$$

$$\times \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{50000 \cdot 0{,}0002}{50000 \cdot 0{,}0002 - 450 \cdot 0{,}34 \cdot \sqrt{0{,}0002} + 0{,}34^2}}\right]$$

$$R = 0{,}34 \cdot \frac{14{,}086}{12} \cdot (1 \pm 0{,}421) = \frac{0{,}525}{(0{,}214)}.$$

Para la sección óptima debe la velocidad alcanzar su máximo, rigiendo la condición

$$v_{máx} = \frac{A \cdot q}{2R^2}.$$

Siendo A = 0,221 (véase cuadro correspondiente), resulta :

$$v_{máx} = \frac{0,221 \,.\, 1,5}{2 \,.\, 0,525^2} = 0,6.$$

(El valor R = 0,214 es una solución extraña.)

Según el resultado obtenido para $v_{máx}$ podemos aumentar la velocidad. Pero aumentándose el valor v crece también R, lo que significa una reducción de $v_{máx}$. Basta luego un pequeño aumento de v para satisfacer a la condición

$$v_{máx} = \frac{A \,.\, q}{2R^2}.$$

Con $v = 0,38$ metros, tenemos :

$$R = 0,38 \cdot \frac{14,24}{12} (1 \pm 0,452) = \frac{0,655}{(0,248)};$$

$$v_{máx} = \frac{0,221 \,.\, 1,5}{2 \,.\, 0,655^2} = 0,385 \text{ m}.$$

Podemos luego calcular, inmediatamente, con $v = 0,29$ y $R = 0,66$ metros. Tenemos, por consiguiente :

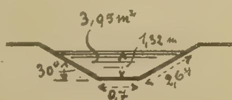


Figura 11

$$t_r = 2 \,.\, R = 1,32 \text{ m}$$

$$a_r = t_r \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{\text{tg}\,\varepsilon}\right) = 1,32 \left(\frac{1}{0,441} - \frac{1}{0,577}\right) = 0;70 \text{ m}.$$

Prueba (fig. 11) :

$$S = 1,32 \left(0,70 + \frac{1,32}{0,577}\right) = 3,95 \text{ m}^2;$$

$$p = 0,70 + 2 \,.\, 2,64 = 5,98 \text{ m};$$

$$R = \frac{S}{p} = \frac{3,95}{5,98} = 0,66 \text{ m};$$

$$v = \frac{87}{1 + \frac{1,3}{\sqrt{0,66}}} \,.\, \sqrt{0,66 \,.\, 0,0002} = 0,384 \text{ m};$$

$$q = 3,95 \,.\, 0,384 = 1,52 \text{ m}^3.$$

El problema está satisfactoriamente resuelto.

2° *Determínense las dimensiones del mismo canal, estableciendo que la profundidad del agua no pase de 1 metro :*

$$t = 1 \text{ m.}$$

Habiéndose determinado para la velocidad máxima el valor de 0,39 metros, que sólo puede regir para la sección óptima, tenemos que admitir, desde luego, para otra sección una velocidad menor.

Con $v = 0{,}37$ metros, resulta :

$$R = 0{,}37 \, \frac{900 \, . \sqrt{0{,}0002} + 4 \, . \, 0{,}37}{60000 \, . \, 0{,}0002} \times$$

$$\times \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{50000 \, . \, 0{,}0002}{50000 \, . \, 0{,}0002 + 450 \, . \, 0{,}37 \, . \sqrt{0{,}0002} \quad 0{,}37^2}} \right]$$

$$R = 0{,}438 \, . \, (1 \pm 0{,}447) = 0{,}633.$$

(El resultado inferior lo dejamos sin considerar.)

De la condición $t = 1$, resulta :

$$R = \frac{2 \, . \, t \, . \, q \, . \, \Lambda}{t^2 \, . \, v + 2q \, . \, \Lambda} = \frac{2 \, . \, 1{,}5 \, . \, 0{,}221}{0{,}37 + 2 \, . \, 1{,}5 \, . \, 0{,}221} = 0{,}64.$$

Los dos valores coinciden bastante bien, de modo que podemos, efectivamente, calcular con $v = 0{,}37$ metros :

$$S = \frac{1{,}5}{0{,}37} = 4{,}05 \text{ m}^2;$$

$$S = 1{,}0 \left(a + \frac{1{,}0}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = 4{,}05;$$

$$a = 4{,}05 - \frac{1{,}0}{0{,}577} = 2{,}317 \text{ m};$$

$$p = 2{,}317 + 2 \, . \, 2 = 6{,}317;$$

$$R = \frac{4{,}05}{6{,}317} = 0{,}641;$$

$$v = \frac{87}{1 + \frac{1{,}3}{\sqrt{0{,}641}}} \, . \sqrt{0{,}641 \, . \, 0{,}0002} = 0{,}374 \text{ m.}$$

La prueba resulta perfecta (fig. 12 de la sección).

3° *Determínense las dimensiones óptimas de un canal, siendo*

$$q = 2 \text{ m}^3;$$

$$i = 0{,}0002;$$

$$\varepsilon = 45°.$$

De la fórmula para $v_{máx}$ deducimos que la cantidad q de agua influye directamente proporcional sobre la velocidad. La velocidad maxima,

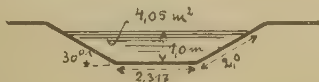


Figura 12

en este caso, será mayor que en el ejemplo primero, en que q era menor. También el valor A aumenta con el ángulo ε

$$A = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{2(2 - \cos \varepsilon)} = \frac{0{,}707}{2 \,.\, 1{,}293} = 0{,}276.$$

Con la velocidad $v = 0{,}44$, resulta :

$$R = 0{,}44 \cdot \frac{900 \,.\, \sqrt{0{,}0002} + 4 \,.\, 0{,}44}{60000 \,.\, 0{,}0002} \times$$

$$\times \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{50000 \,.\, 0{,}0002}{50000 \,.\, 0{,}0002 + 450 \,.\, 0{,}44 \sqrt{0{,}0002} + 044^2}}\right];$$

$$R = 0{,}44 \cdot \frac{14{,}486}{12} \cdot 1{,}48 = 0{,}785$$

$$v_{máx} = \frac{A \,.\, q}{2 \,.\, R^2} = \frac{0{,}276 \,.\, 2}{2 \,.\, 0{,}616} = 0448 \text{ m.}$$

Vemos que $v_{máx}$ coincide bastante bien con el valor aceptado.

Con $R = 0{,}79$, tenemos :

$$t_r = 1{,}58 \text{ m};$$

$$a_r = t_r\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon}\right) = 1{,}58\left(\frac{1}{2 \,.\, 0{,}276} - \frac{1}{1}\right);$$

$$a_r = 1{,}28 \text{ m.}$$

Prueba :

$$S = (1,28 + 1,58) \cdot 1,58 = 4,52 \text{ m}^2;$$

$$p = 1,28 + 2 \cdot 1,58 \cdot 1,414 = 5,75 \text{ m};$$

$$R = \frac{4,52}{5,75} = 0.785;$$

$$v = \frac{87}{1 + \frac{1.3}{\sqrt{0,785}}} \cdot \sqrt{0,785 \cdot 0,0002} = 0,442 \text{ m}.$$

La prueba resulta perfecta.

4° *Determínese el diámetro de una cañería que debe conducir 4 litros por segundo, existiendo un desnivel entre el nivel de agua y el orificio de 8 metros. La longitud en sentido horizontal es de 1000 metros. Se puede aprovechar toda la altura.*

$$i = \frac{h}{l} = \frac{8}{1000} = 0,008.$$

Aceptando primero $\gamma_1 = 15$, resulta :

$$d = \sqrt[5]{\frac{16 \cdot q^2}{\pi^2 i \gamma_1^2}} = \sqrt[5]{\frac{16 \cdot 0,004^2}{10 \cdot 0,008 \cdot 225}} = 0,107 \text{ m}.$$

Se elige un caño de 4 pulgadas, para el cual puede calcularse con $\gamma_1 = 20$ (estado nuevo) y con $\gamma_1 = 14$ (estado de incrustación), de modo que tenemos la seguridad de conseguir, siempre, el caudal deseado.

NUMERICAL ESTIMATES OF HISTORICAL EVENTS

By ARTHUR MAC DONALD
Washington, D. C.

The tables below are an attempt to make an approximate estimate of important events in history in numbers, percentages and averages, up to 1914.

The author has depended for important events, their periods and divisions upon a recent *Reference History of the World*, prepared by leading American professors (1) of history. In counting the events, the author has used the following method: when it is said, «Gela in Sicily is founded by the Rhodians», there are four important events : the mentioning of Sicily, Gela and the Rhodians makes three of them, and the founding, one. When the chronology reads : « Alexander I reigns in Macedonia », there are three important events : the mentioning of Alexander and Macedonia constitutes two, and the reigning one event.

In general, when any city, country, nation, people or other human organization is mentioned, each constitutes one event; their activities when noted, also count each one event. When the birth or death of any person is mentioned, each count one event. Each time the name of the same person, country or other human organization are repeated, each counts an event. This in a certain measure constitutes a qualitative, as well as a quantitative estimate because the names most repeated are usually the most eminent.

It is true that events, which great men bring about personally or of which they are the main imitators, are connected closely with human organizations, but the *historical* mention of their names alone

(1) Albert B. Hart, William S. Furgeson, Charles H. McIlwain, Everett Kimball and David M. Matteson.

and their activities, makes them the predominant factor in the event.

On the other hand, when a state, country or other human organization receives historical mention by name alone or through its activities, it constitutes the predominant factor in the event, which is recorded under human-organization category or division.

Events, as activities, may be designated dynamic, as distinguished from events, as names of persons or human organizations when simply mentioned; these can be called static.

Thus when the chronology reads: «Justinian reigns over the Eastern Roman or Byzantine Empire»; the mention of Justinian is one event; «reign» is another event, both of which come under great men events, one static, the other dynamic. The mention of the «Eastern Roman or Byzantine Empire» comes under the human-organization category or division, and is static. When the chronology reads: «Belisarius attacks Vitiges in Ravenna and takes the City»; there are five events to be recorded. «Belisarius» one (static); «attacks», one (dynamic); Vitiges, one (static); «Ravenna» one (static); «takes the city», one (dynamic). These events belong to great men events, except «Ravenna» which is recorded under human-organization events and as static.

In counting of events, there might be difference of opinion in certain cases, but this would not materially affect the propertions or percentages. For instance, one person might make more events in a chronological statement, than another person, owing to different methods of counting or point of view; but if each was faithful to his method, their number of events might differ, but their percentages or proportions remain practically the same.

We have therefore taken as our basis, mainly percentages, as given in table 4, the basic table.

As a further illustration of estimating important events, when in speaking of the American Revolution, the chronology reads: «It is founded on the right of revolution, denies the divine right of kings, establishes a successful democracy and creates a workable federation»: These words constitute eight important events: (1) founded, (2) right of revolution, (3) denies, (4) divine right of kings, (5) establishes, (6) successful democracy, (7) creates, (8) a workable federation. The words «founded», «denies», «establishes» and «creates», indicate four civil activities or events, and would be counted in column 2, table 4, and the other four in column 4, being human organization events.

TABLE 1

General view of world history according to numbers. Percentages average of important events

Periods of history	Great men						Human organizations						Educational activities or events		Total summary of all events		Length of time in years		Average number of events per year
	Mentioned		Civil activities		Military activities		Mentioned		Civil activities		Military activities								
	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°
Ancient (1500 BC to 476 AD)......	900	27	353	11	238	7	1312	40	146	4	264	8	106	3	3319	100	4976	78	0.6
Medieval (477 AD to 1492)........	729	26	355	13	233	8	1119	40	87	3	235	8	54	2	2812	100	1015	16	2.7
Early Modern (1492 to 1814)......	961	20	439	9	214	4	2165	46	377	8	393	8	246	5	4795	100	322	5	14.9
Nineteenth Century (1814 to 1914)..	194	8	46	2	30	1	1335	55	349	14	285	12	205	8	2444	100	100	1	24.4
Grand totals of events........	2784		1193		715		5931		959		1177		611		13370		6413		2.0
Percentages of grand totals...		21		9		6		44		7		9		4		100		100	

As will be seen from the headings of table 1, we can distinguish three general classes of events, great-men events (columns 1, 2, 3), human-organization events (columns 4, 5, 6) and educational events (column 7). Under great-men events, there are three sub-divisions: the mentioning of any personal name (column 1), of any civil activity of a person (column 2), and of any military activity of a person (column 3).

Under human-organization events, exactly similar subdivisions are made (columns 4, 5, 6) as in the great-men events. Where any activity has both civil and military status, it is assigned according to dominating factor.

Table 1 gives a general view of the history of the world measured by the numbers, percentages and averages of important events. The period having the largest percentages as well as greatest number of important events is the Eearly modern, extending from 1492 to 1814, showing 4795 events (column 8). This period occupied only 5 per cent (322 years) of all the time of history proper (6413 years) as indicated in column 9 of table, which shows that ancient history occupied 78, Medieval 16, Early Modern 5 and Nineteenth Certury only 1 per cent of historical time proper of the world. Column 10 gives the average nuber of events per year for each historical period, being 0.6 for ancient, 2.7 for medieval, 14.9 for Early Modern and 24.4 for Nineteenth Century period. Comparing these figures with those in colum 9, it will be seen that as the average number of events per year increase, their length of time decrease: that is, as history advances, it becomes much more intensive.

EDUCATIONAL ACTIVITIES

Under the head of educational activities (column 7) are included literature, art, science, and in general mental products (1), comprising books, translation, statues, paintings, all discoveries and inventions. Such activities are of the highest order: though they constitute only 4 per cent of all historical events, they doubtless make up much in quality, what they lack in quantity. Of the four great periods, the Nineteenth Century shows the highest per cent of educa-

(1) See Article (by author) entitled *Mentality of Nations*, published in The Open Court, August 1912; also in (Spanish) *Archivos de Pedagogía y Ciencias Afines*, mayo de 1912, Buenos Aires; also in German in *Archiv für die gesamte Psychologie*, XXXIII, Band, 3, un Heft, Leipzig, 1915.

tional events, that is 8 per cent, the ancient period 3 per cent, the Medieval period 2 per cent (the lowest) and the Early Modern period, 5 per cent.

GREAT MEN DECREASING

That great men have decreased in the Nineteenth Century is evident from column 1, table 1, which gives the number and per cent of men mentioned in the four great periods, relative to the number of events in their respective periods. That is, 900 times great men were mentioned in the Ancient Period (column 1), which means 900 events out of the 3319 total events (column 8) of the period, which is 27 per cent. For the Medieval Period it is 729 or 26 per cent, for the Early Modern Period 961 or 20 per cent and for the Nineteenth Century 194 or only 8 per cent, and this notwithstanding the great increase of world population from 54 million at the death Augustus (A. D. 14) to 850 million at the Era of Napoleon (1800 to 1814), to 1550 million at 1900, as will be seen in table 3. Yet the Nineteenth Century with its very low number of great mentioned, has the highest per cent (8) of educational activities. Great men are not necessarily geniuses, but they are sufficiently prominent to be historical personages. This distinct increase of educational activities in the Nineteenth Century may, to a certain extent, compensate for the relative scarcity of great men. We have said in other study (1), that while the peaks have been washing down, the general level in the valleys has been rising; which means the exaltation of the average man.

Table 2 is derived from table 4 by combining the three classes of events under great men (column 1) and the three classes under human organization events in like manner are combined into one. All civil activities are united under one head (column 3) and likewise all military activities (column 4) This summarizes and brings out more distinctly all great men and all human organizations events as such and their combined civil and combined military activities. For convenience we call the combination of the three classes of events under great men, great-men events, and likewise the three classes under human organization, human-organization events.

(1) *Scotts and Scottish Influence in Congress* (by author), published in *Metron*, volumen 1, nº 2, University of Padova, Italy, 1920; also in the Historical Society of Illinois, Springfield, Illinois.

TABLE II

Participation of historical periods and classes of events in World history

Periods of history	Great men events		Human organization events		All civil activities		All military activities		Education activities		Total events or activities	
	1		2		3		4		5		6	
	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%
Ancient (4500 BC to 476 AD)	1491	11	1722	13	499	4	502	4	106	0.8	3319	25
Medieval (477 AD to 1492)	1317	10	1441	10	442	3	468	4	54	0.4	2812	21
Early Modern (1492 to 1814)	1614	13	2935	22	815	6	607	5	246	1.8	4795	36
Nineteenth Century (1814 to 1914)	270	2	1969	15	395	3	315	2	205	1.5	2444	18
Grand totals	4692		8067		2152		1892		611		13370	
Percentages of grand totals		36		60		16		15		4.5		100

In table 2 will be found figures showing to what extent the four great periods of history according to classes of events, have participated in world history.

Under great-men events, including their civil and military activities, are given for each period the number of such events and their percentages of the total events (13.370) of world history. This in ancient history, there were 1491 great-men events, which is 11 per cent of all historical events; in the Medieval period, 10 per cent of all historical events; in the Medieval period, 10 per cent, Early Modern 13 per cent, the highest, and in the Nineteenth Century only 270 events or 2 per cent, the lowest. As already indicated, this very small per cent, or participation, in world history of great men and all their activities, in the last century, is striking. This is all the more apparent when under human organization events, including their civil and military activities, the Nineteenth Century has 1969 events or 15 per cent of all events, which is next to the Early Modern period (the highest) which is 2935 or 22 per cent participation in all history. Human-organization events, as a whole (8067) constitute 60 per cent of history and great-men events (4692) 36 per cent (last line of table).

Under the heads of all civil and all military activities for the four great periods, the percentage of participation in world history is almost the same, except for the Early Modern period where it is 816 events or 6 per cent under all civil activities and under military activities 607 events or 5 per cent.

The Nineteenth Century shows only 315 military events of 2 per cent, the lowest of all four great periods in world military activity. This fact doubtless gave much optimism and made the World War unexpected, if not a surprise to many.

In table 3 is worked out, as far as practicable, the relation between population of the world and important events in world history, with the exception of the Middle Ages, where an estimate of population, seems very difficult to make, if not impossible.

As to the Early Modern Period, there are only four eras, for which estimates are given; these are based upon the authorities named at the end of the table. The dates at which the estimates were made, do not correspond exactly to the dates of the age or era, to which they are applied, but we have arranged them as near as possible.

TABLE III

The relation of population to important events of history

	Total events	Estimated population	Date of estimate	Nº of population for each event	Average vents per year
			at		
Ancient period (4500 B. C. to 476 A. D.)					
1. Eastern Nations and Judea (4500 to 700 B. C.)	500				0.1
2. Age of Greeks (700 to 300 B. C.)	1101	3.000.000	432 B. C.[a]	2.724	3.7
3. Age of the Roman Republic (300 to 43 B. C.)	944				3.7
4. Age of the Roman Empire (43 to 4 B. C.)	88				2.2
5. Beginnings of Christian Era (4 B. C. to 76 A. D.)	686	54.000.000	A. D. 14[a]	28.717	1.4
Averages	664			31.897[k]	0.6
Totals	3319	57.000.000			
Early modern period (1492 to 19814) (Population of World estimated)					
1. Era of Renaissance & Reformation (1492 to 1549)	687				
2. Era of Religious Wars (1549 to 1570)	366				
3. Era of Decline of Spain (1570 to 1604)	419				
4. Era of Thirty Years War (1604 to 1649)	689				
5. Era of Louis Fourteenth (1649 to 1689)	403	500.000.000	1685[b]	1.240.697	1.0
6. Era of Grand Alliance (1689 to 1714)	412				
7. Era of Balance of Powers (1714 lo 1740)	168				
8. Era of Frederick the Great (1740 to 1775)	464				
9. Era of American Revolution (1775 to 1789)	212	640.000.000	1810[c]	3.018.867	15.1
10. Era of French Revolution (1789 to 1800)	311	704.000.000	1816[d]	2.263.665	28.2
11. Era of Napoleon (1800 to 1814)	664	850.000.000	1828[e]	1.280.120	17.4
Averages	436				
Totals	4795	2.694.000.000		1.694.339[l]	14.9
Nineteenth century period (1814 to 1914)					
1. Holy Alliance Era (1814 to 1830)	447	1.272.000.000	1843[f]	2.845.637	27.9
2. Era of European Revolutions (1830 to 1854)	497	1.288.000.000	1859[g]	2.591.549	20.7
3. European War Era (1854 to 1872)	577	1.350.000.000	1866[h]	2.339.688	32.0
4. Reconstruction of Europe (1892 to 1899)	463	1.377.000.000	1872[i]	2.974.082	17.1
5. Preliminaries of War (1899 to 1914)	460	1.550.000.000	1900[j]	3.369.565	30.6
Averages	489				
Totals and averages	2444	6.837.000.000		2.797.463	24.4

Authorities: *a*, Beloch; *b*, Vossius; *c*, Malte Brun; *d*, Balbi; *e*, Hassel; *f*, Berghaus; *g*, Dieterici; *h*, Behm; *i*, Behm and Wagner; *j*, Austin in article on *Population* in *Encyclopedia Americana*; *k*, average of two eras; *l*, average of four eras.

On general principles, the number of the population for any historical period, age or era, required to produce (so to speak) an important event, varies inversely as the activities of the period; that is, the smaller the number of the population required to produce an event, the greater the activity of the people of that period. There may be a few exceptions to this general principle, buy they are due generally to special conditions. It is true, that the average number of events per year has much weight, where the periods are more equal in duration, but where there is much difference in this respect, this average has less significance.

The most striking feature of the table is, that the Age of the Greeks requires only 2724 of its population to produce an important event, but this is only for the population of Greece at 432 B. C. and can be compared with the Roman Empire, which at the death of Augustus (A. D. 14) was estimated by Beloch to be 54.000.000. The population of Greece was 3.000.000 of which 1.000.000 were slaves or servants. Compared with the Roman Empire at 14 A. D., at which time the estimate of its population was made. Greece averages only 2724 population per event while the average for the Roman Empire is 78.717, which is an enormous difference. When we shall consider thas question as to modern countries (table 5), we will find Greece excels them all. New Zeeland (table 5) stands the highest of any modern country requiring 5932 of its population to produce an important event.

In the next two parts of table 3, the Early Modern and Nineteenth Century periods, we are enabled to some extent, to consider world population in relation to events in some of the eras or periods. In the Early Modern period, the Era of Louis Fourteenth (1649 to 1689) required 1.240.697 of world population to produce an event, the Era of the American Revolution 3.018.867, of the French Revolution 2.263.665 and the Era of Napoleon 1.280.120 of world population.

In the Nineteenth Century Period, will be found the world population for each of the five divisions, in connection with their number of events. The third division, the European War Era (1854 to 1872) shows 2.339.688 population for an event, which is lowest, while the last division, the Preliminaries of War (1899 to 1914) requires 3.369.565 population for an event. That is, this Preliminaries of War Period requires (so to speak) the largest number of world population of any period of world history to produce an important event.

TABLE IV

Analysis of history World. Estimated according to number, percentages and averages of important events

Divisions into periods, ages, epochs, eras, etc.	Great men [illegible]: Names mentioned (1)		[illegible] activities (2)		Military activities (3)		Human organizations: Nations [illegible] (4)		[illegible] activities (5)		Military activities (6)		[illegible]ational literary & [illegible] activities (7)		Total of events and percentages of totals (8)			Number of years (9)		Average number of events per year (10)
	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%		N°	%	
Ancient Period Earlier times (4500 to 176 A. D.)	900	27	353	11	238	7	1312	40	146	4	264	8	106	3	3319	100	25	4976	78	0.6
1. Eastern nations and Judea (4500 to 700 B. C.)	127	25	54	10	32	6	218	43	28	8	26	5	15	3	500	100	15	3800	76	0.1
2. Age of Greeks (700 to 300 B. C.)	288	26	90	8	75	7	466	43	48	4	95	9	39	3	1101	100	33	100	8	2.7
3. Age of Roman Republic (300 to 43 B. C.)	265	28	91	9	84	9	353	38	35	4	99	10	17	2	944	100	28	257	5	3.7
4. Age of the Roman Empire (43 to 4 B. C.)	37	42	10	11	4	4	25	30	2	2	7	8	3	3	88	100	3	39	1	2.2
5. Beginnings of the Christian Era (4 B. C. to 176 A. D.)	183	27	108	16	43	6	250	36	33	5	37	5	32	5	686	100	21	180	10	1.4
Medieval Period (177 A. D. to 1492)	729	26	355	13	233	8	1119	40	87	3	235	8	51	2	2812	100	21	1015	16	2.7
1. Barbarian Ascendancy in Europe (177 to 622 A. D.)	48	25	19	10	20	10	44	23	12	5	47	25	5	2	195	100	7	145	14	1.3
2. Mohammedan Ascendancy (622 to 771)	41	28	22	15	15	10	58	39	0	0	11	7	1	1	148	100	5	119	15	0.9
3. Age of Charlemagne (771 to 845)	29	32	10	11	9	10	34	38	2	2	5	6	1	1	90	100	3	74	7	1.2
4. Establishment of European States (845 to 1013)	59	27	31	14	17	8	95	42	7	3	11	5	2	1	222	100	8	168	17	1.3

5. The Empire and the Pope (1013 to 1095).	73	31	38	16	16	7	92	40	7	3	5	2	2	1	233	100	8	82	8	2.8
6. First Epoch of Crusaders (1095 to 1189).	95	28	53	15	21	6	133	40	9	2	23	7	8	2	312	100	13	94	9	3.6
7. Second Epoch of Crusaders (1189 to 1273).	145	26	70	13	50	9	232	42	15	3	39	7	2	0	553	100	20	84	8	6.5
8. Irruption of Asiatics (1273 to 1340)....	97	26	40	11	41	11	144	40	8	2	25	7	11	3	366	100	13	67	7	5.4
9. Renaissance Epoch (1340 to 1455).....	72	17	51	12	22	5	196	46	25	5	45	11	18	4	429	100	15	115	11	3.7
10. Events Leading to Foundation of Modern Europe (1455 to 1492)...........	70	30	21	9	22	9	91	39	2	1	24	10	4	2	234	100	8	37	4	6.3
Early Modern Period (1192 to 1814)......	961	20	439	9	214	4	2165	46	377	8	393	8	246	5	4795	100	36	322	5	14.9
1. Era of Renaissance & Reformation (1192 to 1549)...........................	188	27	96	14	48	7	272	40	19	3	37	5	27	4	687	100	14	57	18	12.0
2. Era of Religious Wars (1549 to 1570)...	107	29	31	9	22	6	144	40	22	6	24	7	13	3	366	100	8	21	7	17.4
3. Era of Decline in Spain (1570 to 1604)..	107	25	35	8	27	7	184	44	24	6	20	5	22	5	419	100	9	34	11	12.3
4. Era of Thirty Years War (1604 to 1649).	145	21	53	8	31	4	302	44	63	9	49	7	46	7	689	100	15	45	14	15.3
5. Era of Louis Fourteenth (1649 to 1689).	51	13	22	5	14	3	202	50	44	11	52	13	18	5	403	100	8	40	12	1.0
6. Era of Grand Alliance (1689 to 1714)..	92	22	55	13	11	3	186	46	26	6	25	6	17	4	412	100	9	25	8	16.4
7. Era of Balance of Powers (1714 to 1740).	43	26	31	18	1	0	54	31	22	11	11	7	6	4	168	100	3	26	8	6.4
8. Era of Frederick the Great (1740 to 1775)............................	92	20	50	11	14	3	199	42	22	5	42	9	45	10	464	100	10	35	11	13.2
9. Era of American Revolution (1775 to 1789)................................	20	9	5	2	5	2	115	55	33	16	21	10	13	6	212	100	4	14	4	15.1
10. Era of French Revolution (1789 to 1800).	27	9	11	4	13	4	176	56	35	11	47	15	2	1	311	100	6	11	3	28.2
11. Era of Napoleon (1800 to 1814)......	89	13	47	7	28	4	331	50	67	10	65	10	37	6	664	100	14	14	4	47.4
Nineteenth Century Period (1814-1914)....	194	8	46	2	30	1	1355	55	319	14	285	12	205	8	2444	100	18	100	1	24.4
1. Holy Alliance Era (1814 to 1830)......	40	9	5	1	2	0	234	52	84	19	43	10	39	9	447	100	18	16	16	27.9
2. Era of European Revolutions (1830 to 1854)..............................	76	15	7	2	4	1	216	43	67	14	36	7	91	18	497	100	20	24	23	20.7
3. European War Era (1854 to 1872).....	39	7	14	3	22	4	320	54	79	14	79	14	24	4	577	100	24	18	19	32.0
4. Reconstruction of Europe (1872 to 1899).	28	6	10	2	0	0	261	56	51	11	69	15	44	10	463	100	19	27	28	17.1
5. Preliminaries of War (1899 to 1914)....	11	3	10	2	2	0	304	65	68	15	58	13	7	2	460	100	19	15	14	30.6
Grand totals.................	2781		1193		715		5931		969		1177		611		13370		100	6413		2.0
Percentages of Grand totals....		21		9		6		44		7		9		4		100			100	

In the totals for the Early Modern and Nineteenth Century periods the averages are respectively 1,644,279 and 2,797,465 population per event, that is the four divisions of the Early Modern Period, if taken as representing the whole period, show this grand period to excel greatly the Nineteenth Century in relative activity. In fact the table as a whole shows, that while in the history of the world, the number of population per event has increased greatly the events of each period have not increased. Moreover important events in the past had much more difficulty in coming to notice than in modern times. This would seem to suggest that the quality of world activities or events was much higher in past ages. That the number of events for each age, era or period, have not only not increased, but rather decreased, is indicated by taking the average for all the divisions of the four great periods of history. Thus dividing the totals by number of divisions the average number of events for the Ancient Period is 644, for the Medieval Period is 281, for the Early Modern Period 436, and for the Nineteenth Century Period 459. The Medieval Period is distinctly lowest and the Ancient Period distinctly the highest.

This general tendency toward decrease of events, though quite variable from period to period, is confirmatory of other results of this study, reached from various points of view.

GENERAL ANALYSIS OF WORLD HISTORY

Table 4 analyzes in detail the history of the world according to number, percentages and averages. Each of the four great historical periods are subdivided into various epochs, giving the numbers and percentages of each, for the seven differente classes of events. Table 4 is the foundation table upon which the other tables are based.

Taking first a general glance at table 4, we note the relative increase in average number of events per year (column 10), as already mentioned, under table 1, but it stands out here more in detail, that is for the 31 subdivisions or periods. In running down column 10, it will be seen, that the average number of events per year, or intensity to a certain degree of participation in the worlds history, is not regular but quite variable, yet there is a general tendency to increase after the Medieval period, beginning with the Early Modern. In the Medieval period, the two highest averages of events per year are

6.5 for the Second Epoch to the Crusades, lasting 84 years (1189 to 1273), and 6.3 for the period of events leading to the Foundation of Europe, lasting 37 years (1455 to 1492). This last period of the Medieval is, however, more intensive in its Medieval participation, though with two tenths lower average, for it takes only 37 years (1455 to 1492). This last period of the Medieval is, however, more intensive in its Medieval participation, though with two tenths lower average, for it takes only 37 years (4 per cent), that is less than half the time required (84 years) for the Second Epoch of the Crusade, which is 8 per cent of Medieval time.

The greatest average number of events per year is 47.4 in the Era of Napoleon, lasting only 14 years (1800 to 1814). It might be thought, that the shortness of this period (14 years) was the main reason for so high an average, but this is modified by the fact, that the Napoleonic Era produced 664 events, the third largest number in the Early Modern period. The Era of the Thity Years War produced 689 the largest number of events, and the Era of Renaissance and Reformation 687, not many more than the Era of Napoleon. But the Era of the Thirty Years War lasted 45 years and that of the Renaissance and Reformation 57 years.

In our estimate to follow of different countries (table 5), a number of the European Nations date their beginning from 1648, that is from the Westphalian Peace Treaty at the end of the Thirty Years War. The author has shown in another study how this treaty ending the War, at the same time caused all religious wars to cease (1).

The average of events per year for the Nineteenth Century period (1814 to 1914) is 24.4, the highest of all the four great periods. While the five subdivisions of this period are relatively short, yet their number of events are relatively large, all being between fourd and five hundred, except the European War Era (1854 to 1872), which has 577 events, also averaging 32.0 events per year, the next to the highest (Era of Napoleon, 47.4) in all history. In general, it will be seen, taht those subdivisions of the four grand periods, which are noted for war, have a high annual average of events. Thus the Era

(1) *Fundamental Peace Ideas,* including the Westphalian Treaty (by author), published by the United States Senate, in Congressional Record for July 1, 1919; also in Spanish, in *Nuestro Tiempo,* Junio 1919, Madrid; also in Italian, in *Rivista d'Italia*. 1919, vol. 1, fasc. IV, Milano; also in *Reformed Church Review,* Octubre, 1919; also in Croatian, in *Narodni List,* June 8, 1919, New York City.

of Napoleon averages 47.4, the European War Era (1854 to 1872), 32.0 the Era of the French Revolution 2.82, the Era of Religious Wars (1349 to 1570), 17.4, the Era of Thirty Years War (1604 to 1649), 15.3, and the Era of the American Revolution (1775 to 1789), 15.1 average of events per year.

ANCIENT HISTORY

After this general survey of table 4, we will examine briefly, but more in detail, the four great periods of history.

The Ancient period has five divisions of very unequal length of time. The first division or Eastern Nations and Judea occupies 3800 years (4500 B. C. to 700 B. C.) or 76 per cent of the time of the whole period, while the Age of the Roman Empire has only 39 years or 1 per cent of ancient time (column 9). This division has the lowest average (1.0), of any division of any period (column 10) due to its long duration. It has also a relatively low total number of events, 501), or 15 per cent of all the events of the ancient period (column 8).

The Greek Age (700 to 300 B. C.) has by far the largest number of total events, 1101 or 33 per cent not only for ancient but for all history: yet its average number of events per year (2,7) is less than that of the Roman Republic, which is 3,7 (column 10), probably due to the fact the Greek Age is 143 years older than the Roman Republic, occupying 3 per cent more of ancient time (column 9).

The Roman Republic excels all other periods of ancient history in military activities-9 per cent under great men (column 3), and 10 per cent under human organization (column 6), and stands next to the Greek Age in total number of events (column 8). As it had a larger population than Greece, it should normally have produced a greater number of important events, but as Greece excels the Roman Republic in events, it indicates a general superiority, requiring less population to produce an event.

The Age of the Roman Empire (43 B. C. to 4 B. C.) is a very short one for Ancient History, occupying 39 years only. It produced only 88 important events, only 3 per cent of the ancient period (column 8). The Roman Empire has the largest per cent of great men mentioned (column 1) 42 per cent and a low per cent of military activities, indicating a relatively peaceful time, being the Golden Age of Latin Literature.

The period of Beginnings of the Crhistian Era (4 B. C. to 476 A. D.) is a long one of 480 years, producing 686 events (column 8) or 21 per cent of Ancient History events. This period shows a low percent of military activities and a high percent of civil activities.

MEDIEVAL PERIOD

Considering the Medieval Period in its ten subdivisions, we note that the period of Barbarian Ascendancy in Europe (477 to 622) has very high percents of military activities, 10 per cent under great-men (column 3) and 25 per cent under human-organization (column 6), making 35 per cent, which is double that of any of the other divisions. This division has also a low average (1.3) of number of events per year (column 10).

The second division, the Mohammedan Ascendancy, shows the lowest average (0.9) number of events per year; it also has a low per cent (5) of total events (column 8), though its per cent (15) of length of time is high, being 149 years (column 9). The idea here is that a long period has more opportunity to produce events, but if it fails in this respect and its average events per year be low, this indicates slowness of advance or lack of activities.

The Age of Charlemagne is highest in names of great men mentioned, which is 32 per cent (column 1); its military activities are higher than its civil (columns 2, 3, 5 and 6), being 16 and 13 percent respectively. It also has the lewest number of total events, 90 or 3 per cent (column 8) and an average number of events per year of 1.2 (column 10), which is next to the lowest for the Medieval Peried.

The fourth division of Establishment of European States (845 to 1013) is high in per cent of human organizations mentioned, which is 42 (column 4) and low in average number of events per year, which is 1.3 (column 10).

The fifth division, that of Empire and Pope (1013 to 1095), shows the highest per cent (16) of civil activities (column 2) under great men mentioned, and the lowest per cent of total military activities (columns 3 and 6), that is 9 per cent; also the highest per cent of all great men events combined, which is 54 (columns 1, 2, 3) is found here.

The Second Epoch of the Crusades has the highest per cent (20) of total events (columns), and the highest average of events per

year, which is 6.5 (column 10), but a negligible number of educational events, marked blank (column 7).

The division for Irruption of Asiatics (1270 to 1340) has a high percent of all military events (columns 3 and 6) which is 18 per cent, and a high average of events per year, which is 5,4 (column 10).

The Renaissance Epoch (1340 to 1455) shows the highest per cent of educational events (4) and the highest per cent of names mentioned of human organizations (column 4), that is 46 per cent.

EARLY MODERN PERIOD

In the Early Modern Period the first division, or Era of Renaissance and Reformation (1492 to 1549), has the highest per cent (48) of all great men events combined (columns 1, 2, 3) and a high per cent (14) of total events (column 8).

The Era of Religious Wars (1549 to 1370) is lowest of all the eleven divisions of the Early Modern Period in educational activities, 3 per cent, except the Era of the French Revolution, which is only 7 per cent (column 7), but it is high in average number of events per year, that is 17.4 (column 10).

The Era of Thirty Years War (1604 to 1649) has a low per cent (33) of great-men events and the highest per cent of total events (column 8), that is 15 per cent.

The Era of Louis Fourteenth (1649 to 1689) has a low per cent (13) of names of great men mentioned (column 1) and the lowest average of events, that is only 1.0 (column 10), but a relatively high per cent (50) of names of human organizations mentioned (colum 4).

The Era of the Grand Alliance (1689 to 1714) has a low per cent (9) of total military events (columns 3 and 6 combined), but a high average (16.4) of events per year, and a high per cent (46) of names mentioned of human organizations (column 4).

The Era of Balance of Powers (1714 to 1740), shows the lowest per cent (7) of total military events, also the lowest per cent (31) of human organizations mentioned (column 4), also the lowest per cent (3) of total events.

The Era of Frederick the Great (1740 to 1775) gives the highest percent by 10 of educational activities.

The Era of the American Revolution (1775 to 1789) is one of the shortest periods of the early modern and has, like the French Revo

lution, the lowest per cent (9) of names of great men mentioned (column 1), but a relatively high per cent (6) of educational activities (column 7).

The Era of the French Revolution (1789 to 1800) is only 11 years, and the shortest period of not only the Early Modern but of all history, that is of the 31 divisions of this table. It has next to the highest (28.2) average events per year, and the highest per cent 82 of total human organization events (columns 4, 5, and 6 combined), but the lowest per cent (1) in educational activities (column 7).

The Era of Napoleon (1800 to 1814) is also a very short period, the second shortest of all history. It has also by far the highest average of total events per year (47.4) of all periods or divisions of all history. Its number of total events, 664 or 14 per cent is very high for such a short period, indicating an intensity of activity, due to a military genius.

NINETEENTH CENTURY PERIOD

This is the shortest of the four grand periods of history, lasting 100 years (1814 to 1914). The first division or Holy Alliance Era (1814 to 1830) has next to the lowest per cent (10) of total military activities (columns 3 and 6 combined).

The Era of European Revolutions (1830 to 1854) has the highest per cent by far (15) of great men's names mentioned (column 1), and the lowest per cent (43) of human organizations mentioned (column 4). It has the highest per cent (18) by far of educational activities, not only of Nineteenth Century, but of all history periods.

The European War Era (1854 to 1872) stands highest (24 per cent) in number of total events (column 8) and in average of events per year (32.0) excels all periods or divisions of all history except the Era of Napoleon.

The division of Reconstruction of Europe (1872 to 1899) shows the highest per cent (10) of educational activities, except Era of European Revolutions.

The division for Preliminaries of War (1899 to 1914) gives an extraordinarily low per cent (only 5) of all great-men events (columns 1, 2, 3 combined) and as extraordinarily high per cent (93) of total human-organization events (columns 4, 5, 6 combined) indicating a tendency to compensate for scarcity of great men, by increase in human organizations.

TABLE V

Estimate of important events in different countries of the World

Countries	Great Men			Human organization			Totals of all activities and events	Age of country in years	Average number of events per year	Density of population	Number of population per important event (about 1914)
	Names mentioned	Civic activities	Military activities	Names mentioned	Civic activities	Military activities					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	%	%	%	%	%	%					
United States (1492-1914)	8	5	2	64	17	4	12.267	422	29.06	30.9	7.497
Canada (1497-1914)	7	6	1	62	21	3	1.435	417	3.44	1.93	5.022
Great Britain (1649-1914)	13	10	1	51	21	4	4.246	265	16.02	379.1	10.719
Sweden (1648-1914)	15	8	3	55	15	4	433	266	1.62	33.3	12.753
France (1648-1914)	13	9	3	55	11	6	3.600	266	13.53	189.5	11.000
Germany (1648-1914)	9	8	1	64	14	4	1.741	266	6.54	310.5	36.215
Austria (1648-1914)	13	9	3	53	14	8	1.256	266	1.75	246.5	22.718
Italy (1648-1914)	10	11	2	57	15	5	628	266	2.36	326.5	56.668
Spain (1648-1914)	17	12	3	50	12	6	1.138	266	4.27	105.2	17.531
Belgium (1468-1914)	5	6	—	57	29	3	272	466	0.58	652.0	27.293
Switzerland (1648-1913)	1	7	0	64	24	4	314	265	1.18	234.8	11.917
Argentine (1516-1914)	12	16	1	46	17	8	254	398	0.63	6.83	31.044
Brazil (1500-1914)	11	15	1	49	17	4	233	414	0.56	5.4	105.658
Bolivia (1538-1914)	9	6	2	54	23	6	90	375	0.24	3.38	32.110
New Zealand (1642-1914)	4	4	0	59	26	5	170	272	0.60	9.73	5.932
Australia (1642-1914)	4	4	0	66	25	1	708	309	2.29	1.49	6.278
South Africa (1487-1914)	4	2	1	68	20	5	588	427	1.37	12.62	10.158
India (1498-1914)	10	7	2	56	18	7	1.124	416	2.70	175.0	280.388
Japan (1542-1914)	6	6	1	59	22	6	1.158	372	3.11	207.9	46.819

Table 5 presents an estimate of important events in some of the leading countries of the world, in percentages (columns 1-6) in total numbers (column 7) and in averages (colum 9). In column 11 is given for each country the numbers of population near the year 1914, which to some extent may indicate the importance and activity of a country. The events considered important in a country may not be so considered from a world point of view, in fact a large number of such events are never mentioned in world history.

If we estimate the countries in table 5 according to number of population per important event (column 11), the following is their ranking order: 1, Canada; 2, New Zealand; 3, Australia; 4, United States; 5, South Africa Union; 6, Great Britain; 7, France; 8, Switzerland; 9, Sweden; 10, Spain, and so on to India, which requires 280.388 of her population to produce one important event, while the United States, for example, only requires 7497 of her population for each event.

If we estimate countries according to average number of events per year (column 9), the following is their ranking order: 1, United States; 2, Great Britain; 3, France; 4, Germany; 5, Austria; 6, Spain; 7, Canada; 8, Japan; 9, India; and 10, Australia, and so on down to Bolivia which has average of only 0.24 events per year. It will be noted that the United States ranks first according to average number of events per year and fourth according to population required for the production of an important event. Great Britain also ranke second according to one standard and sixth according to the other. In general, the English speaking nations lead. There appears to be no apparent relation of density of population (column 10) to either standard of population per important event (column 11) or average number of events per year (column 9).

Beginning with column 1 (table 5), it appears that the English speaking nations (except Great Britain) rank low in their great men mentioned. This may be interpreted, that conspicuously great men are not so numerous, relatively, but that the general level of the people is higher, tending to show a more democracie condition.

Comparing the percentages for civil and military activities of great men (columns 2 and 3), it will be seen that their civil activities are much greater than their military. France, Sweden, Austria, and Spain have three per cent for military activities. All other countries in table are lower. The highest percentages for civil activities of great men, are 16 for Argentina, 15 for Brazil, 12 for Spain, 11 for Italy and 10 for Great Britain; in general, it is the Latin nations which

show greater relative civil activities on the par of their distinguished men. As to military activities of their great men, France, Austria, Spain and Sweden show each 3 per cent, which is the highest, which might be interpreted as a manifestation of more military spirit among their great men. These countries (except Sweden) heve very high percentages for their military activities or human organizations (column 6), Austria 8, France and Spain each 6 per cent, which is confirmatory of their high percentages fer great men military activities (column 3).

A summary or total of all the events or activities for each country is given in column 7, which is used as a basis for working out the average number of events per year (column 9) ad number of population for each event (column 11).

It is apparent from columns 2 and 5 that civil activities or events are very much greater in number than military activities or events (columns 3 and 6). In the United States it is 22 per cent civil to 6 per cent military, in Great Britain it is 31 to 5 per cent. In Austria, the per cent for military activities is 11 which is the highest; in France it is 9 per cent which is high. In Belgium military activities are only 3 per cent; in Switzerland it is 4 per cent. These are the lowest for European countries. This may be due to the fact that these two countries were made neutral territory by the Powers.

It is interesting to note in table 5 (column 8) the historical ages of countries. Belgium is 446 years old, then in order of age come South Africa, 427 year; United States, 422 years; Canada, 417; India, 416; Brazil, 414; Argentina, 398; Bolivia, 375; Japan, 372, down to Great Britain and Switzerland the youngest which are 265 years of age.

DEL SOL Y DE LA TIERRA

POR EL INGº OTTOMAR SCHMIEDEL

¡Sumatra y Java! Basta mencionar estos dos nombres y de inmediato surge a nuestra mente el cuadro de los paisajes, en que una vegetación exuberante demuestra aquella vida voluptuosa, que sólo puede desarrollarse bajo el cálido aliento de los trópicos.

¿Quién podría enumerar las formas de vida que esconde y que presenta este tejido casi impenetrable de bejucos, ramas y hojas, reflejo fiel de la lucha por la vida? Sólo los árboles, los cocoteros y palmeras se rompen camino hacia arriba, usando el brutal derecho del más fuerte, para conquistarse aire y sol, hasta que llega también para ellos el momento en que una fuerza de vida mayor todavía les impondrá su voluntad, los hará caer y morir, como aquel árbol allá, roído por el vencedor «tiempo», a medio caer entre el tupido ramaje que ahora le sostiene. Alza sus ramas desnudas, cual brazos demacrados, como si quisiera protestar contra la muerte. Su tronco mórbido y hueco ofrece refugio a toda clase de seres, fomentando así a su vez el árbol moribundo o muerto ya, el desarrollo de otras formas de la vida. En estas regiones ecuatoriales, la fuerza inagotable de la naturaleza dispone de los dos recursos principales, del calor y de la humedad, para crear ese ambiente tibio sensual, propio de los trópicos, en que millares de seres y formas de todos los colores engendran incansablemente otros para llenar con ellos agua, tierra y aire.

El mar se extiende a lo lejos y se pierde en el horizonte. Su superficie, suavemente agitada por una brisa, refleja el profundo azul de la cúpula celeste. Algunos botes de pescadores y de buscadores de corales balancean sobre las olas, algún velero surca despacio el mar,

y el oleaje, en suave y continuo vaivén, se rompe en la costa. Un cuadro de belleza, de vida y de paz que llega a su apogeo cuando el sol púrpureo desapareció en el mar, cuando la hoz de la luna platea el paisaje, cuando miles de voces nocturnas cantan la eterna canción del amor.

Existe, sin embargo, sobre este cuadro de luz y de vida una sombra: es el hecho de que estas regiones del archipiélago Índico se encuentran sobre un foco sísmico, que hizo crisis con la catástrofe del 27 de agosto de 1883.

El volcán Rakata, situado sobre la isla Krakatoa en el estrecho de la Sonda entre Sumatra y Java, había quedado inactivo durante 200 años, pues su última erupción se había producido en 1680.

El 20 de mayo de 1883 entró inesperadamente en actividad, secundado por otros centros volcánicos, sin que se diera mayor importancia a esta reacción.

El 26 de agosto del mismo año recrudecieron notablemente las erupciones y las poblaciones en las costas próximas de Java y Sumatra pasaron la noche del 27 en vela y con inquietud angustiosa.

En la mañana del 27 de agosto, de 7 a 10, se produjo la catástrofe más grande que registra la historia. Con terribles detonaciones estalló todo el volcán y arrojó las masas eruptivas en una inmensa columna hasta la altura de 27 a 30 kilómetros. En la colonia francesa de Cochinchina, distante 1900 kilómetros del lugar del desastre, se distinguieron tan claramente las detonaciones, que creyeron en una batalla, que debía haberse librado en el mar. El área en que se oyeron las detonaciones eruptivas alcanzó la décimaquinta parte de la superficie del globo terráqueo.

Los efectos dinámicos fueron enormes. En Batavia osciló la presión atmosférica en 50 milímetros; se apagaron las llamas del gas, encendidas a causa de la obscuridad, que sobrevino, y se rompieron los cristales. Poco después se inundaron las partes bajas de la misma ciudad por un oleaje nunca visto del mar, causado por el derrumbamiento del volcán. De la furia del mar podemos darnos una idea, imaginándonos que, inmediatamente después del hundimiento del cráter, olas de 36 a 40 metros de altura azotaron la costa de Bantam, distante más o menos 30 kilómetros del lugar de la erupción. Las olas cruzaron el océano índico con velocidad espantosa, pues ya a las nueve horas después de la catástrofe se estrellaron contra la costa de Madagascar, la que dista más de 600 kilómetros del estrecho de la

Sonda. Y ocho horas más tarde, la ola principal había pasado a través del Atlántico y llegó al Cabo de Hornos. Los fluviómetros de todos los mares indicaron el paso de la ola, que dió la vuelta al rededor del mundo. Las curvas en la figura 1 presentan el lugar de la ola de hora a hora.

De la distancia hasta donde fueron arrojados algunos cuerpos erup-



Figura 1

tivos, se ha deducido que ellos debieron haber tenido una velocidad inicial de más de 1000 metros por segundo y que, probablemente, habían alcanzado alturas de 50 kilómetros.

Un vapor de ruedas, anclado en la rada de Telok-Belong, fué llevado a más de 5 kilómetros tierra adentro. Arrecifes de corales hasta de 300 metros cúbicos de volumen fueron arrancados y tirados sobre la costa lejos del lugar de su origen.

La lluvia de ceniza produjo un sudario parduzco gris, que alcanzó en partes un espesor de 30 a 40 metros.

Se ha calculado que las masas arrojadas deben haber alcanzado de 11 a 18 kilómetros cúbicos, que equivalen a un cubo, cuyas aristas tienen un largo de media legua aproximadamente.

Cantidades enormes de polvo llegaron por esta explosión hasta las capas superiores de la atmósfera, esparciéndose al rededor de la Tierra.

El reflejo de los rayos solares en las partículas finas, flotantes a altísimas alturas de la atmósfera, debió de producir los hermosos arréboles, que prolongaron los dos crepúsculos diurnos notablemente hasta 203 años después.

De las 3200 hectáreas, que abarcó la isla Krakatoa, no quedaron sino 1000, y en el lugar donde antes se elevó el cráter del Rakata hasta 832 metros sobre el mar, hubo después una profundidad de 200 a 300 metros.

Esta es, en síntesis, la historia del suceso volcánico del 27 de agosto de 1883, en el que perecieron al rededor de 40.000 hombres y desaparecieron poblaciones enteras.

Hay razones para suponer que el suceso desastroso asumió proporciones tan gigantescas por la coacción de circunstancias especiales, admitiéndose como tal, en primer lugar la penetración de agua en arterias volcánicas, de lo que debió resultar una verdadera explosión. El hecho, sin embargo, de que la acción volcánica empezara con algunos otros centros de aquella región, en mayo, y siguiera con intermitencias hasta agosto, hace probable, como causa fundamental del siniestro, la tendencia y el efecto de desplazamientos o dislocaciones sufridas en la costra, que inmediatamente debieron tener como resultado la reacción de las « válvulas ».

Esta suposición adquiere tanto más carácter de probabilidad, cuando encontramos en aquella región los rasgos típicos del arrastramiento hacia el norte, que terminó en la edad terciaria con la formación del Himalaya.

La acción volcánica que presenciamos aún sobre las líneas de deformación o de desplazamiento, como las que se presentan tan claramente pronunciadas en los contornos de los continentes al rededor del océano Pacífico y del Índico, comprueba, a su vez, que también perduran allá todavía los desplazamientos y dislocaciones en la costra.

La causa primordial de sucesos volcánicos de tal carácter la tenemos probablemente en la tendencia de los continentes a cambiar sus posiciones bajo una influencia que aún no se conoce suficientemente.

El geofísico Wegener indica en su genial teoría dos movimientos de los bloques continentales: uno en dirección occidental y otro polofuga. La forma casi elipsoidal de la tierra, que resulta del aplanamiento del globo en los polos, implica las condiciones para la existencia de fuerzas polófugas en los continentes y significa al mismo tiempo mayor acumulación de masas en dirección al Ecuador.

A este cinturón ecuatorial de materia agregada a la esfera teórica (fig. 2), y a la inclinación del plano del Ecuador hacia el plano de la eclíptica, en coacción con el efecto de la atracción del sol y de la luna sobre el cinturón, debemos la precesión y la nutación (lunisolar precesión), vale decir la oscilación, que experimenta el globo con su

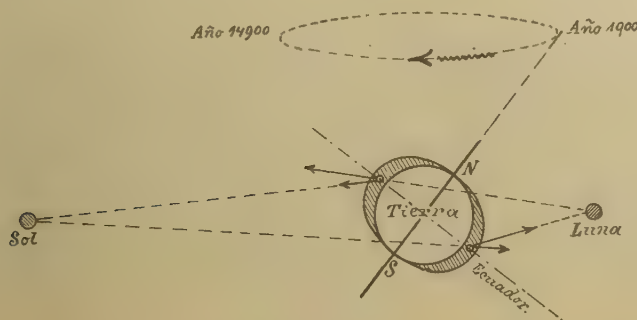


Figura 2

eje en el espacio y que se opera en períodos de 2500 años. La influencia de la luna por sí sola sobre el cinturón mencionado produce pequeñas oscilaciones del cuerpo terrestre en períodos cortos de aproximadamente 19 años.

Sobradas razones hay para suponer que la materia terrestre, a la profundidad de 40 a 50 kilómetros, se halla en un estado plástico y la costra misma se ha revelado suficientemente elástica, por lo que la modificación de la posición de la tierra, por las fuerzas en el cinturón ecuatorial, no puede producirse sin fuertes tensiones, deformaciones, desgarramientos y desplazamientos en la costra misma. Todo esto tiene que originar, a su vez, un pequeño desplazamiento del eje de rotación.

Podemos decir que la causa primordial de la nutación y el hecho de cierta elasticidad de la costra implican por sí, a sus veces, pequeñas variaciones en la posición del eje de rotación terrestre, las que

deben tener otra vez un reflejo sobre la distribución de las masas.

No cabe duda de que un corte vertical en la corteza terrestre demostraría en el interior desigualdades semejantes como las que ofrece la superficie, motivadas por las plegaduras en la costra y por el estado térmico de las capas inferiores, sobre el que influyen las diversas materias con diferentes calidades físico-térmicas.

Las tensiones y presiones, los desgarramientos y desplazamientos en la costra son una consecuencia natural del estado de la corteza, sometida a la tendencia de una « torsión », que experimenta el cinturón ecuatorial por las fuerzas cósmicas (Sol-Luna).

Partiendo de este punto de mira, deben considerarse los pequeños movimientos polares como consecuencia de los sucesos en la costra, y no al revés, como sucede por lo general.

Recordamos a este respecto el dato altamente ilustrativo según el cual las masas continentales desplazadas por el terremoto de Charleston (1886) abarcaron en la superficie terrestre 2.300.000 kilómetros cuadrados.

Las estadísticas de Milne y Cancani indican con exactitud las relaciones entre el número anual de los terremotos mundiales, cuyos efectos se hacen notar sobre extensas regiones del globo, y el movimiento polar del mismo año expresado en segundos (arco).

Damos a continuación los datos principales de esta estadística :

Años	Número de temblores mundiales	Movimiento polar en segundos
1895	9	0.53
1896	18	0.91
1897	45	1.07
1898	30	1.03
1899	27	0.72
1900	17	0.32
1901	22	0.53
1902	29	0.97

Muy ilustrativos son los datos que ofrece la estadística de Montessus de Ballore, por cuanto indica 3830 ataques sísmicos por término medio en cada año, de lo que puede deducirse una vibración cada dos horas y media. Los efectos dinámicos en la corteza presentan luego, como es lógico, un estado permanente de acción, el que debe indudablemente contribuir a variaciones en el estado magnético. Alteraciones más o menos bruscas de este estado magnético, originadas

por fenómenos cósmicos pueden naturalmente transformarse a su vez en efectos dinámicos.

Tales alteraciones o perturbaciones en el estado magnético terrestre las producen las manchas solares al pasar « frente » de la Tierra.

Las relaciones íntimas entre las perturbaciones en la superficie solar y las magnéticas terrestres, constatadas desde hace mucho tiempo, resaltan a la vista al fijarnos en la figura 3, que representa gráficamente, en las curvas A y B, las respectivas perturbaciones desde el año 1745 hasta 1875, vale decir, en el intervalo de 130 años.

Más ilustrativos todavía son las figuras 4 y 5, cuyas curvas A, B, Bi y C demuestran la acción solar (A), la variación de la declinación (B) y de la intensidad magnética terrestre en la superficie (Bi), y además la frecuencia de las auroras boreales (C).

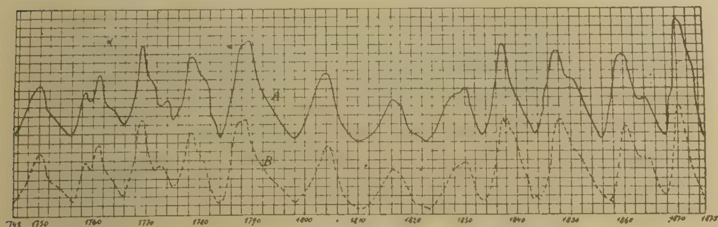


Figura 3

El año 1883 ha sido un año en que la acción solar alcanzó un valor máximo y muy probablemente tenemos que buscar en su coacción el efecto brusco de desplazamientos y desgarramientos, que luego causaron la catástrofe del 27 de agosto.

Sobre el inmenso espacio de 150 millones de kilómetros creó el sol paulatinamente aquel hermoso paisaje de luz y vida, y bastaron horas para que su acción perturbadora se hiciera sentir a través del mismo espacio en una destrucción espantosa y sin igual, destrucción que repercutió sobre todo el globo terrestre.

Muy poco es lo que sabemos con referencia a estas manchas solares, cuya observación evidenció una vez más el inmenso poder que tiene el astro central sobre sus planetas súbditos.

Nuestras observaciones nos hacen suponer las manchas como cavidades en la fotosfera, en las que parecen desarrollarse sucesos parecidos a torbellinos o ciclones de proporciones difícilmente imaginables.

Es natural que los astrónomos al tratar de explicar estos fenómenos solares, se basaron en primer lugar en las experiencias, que la naturaleza en general permitió hacer en fenómenos aparentemente similares. Cierta relación existente entre las protuberancias y las manchas indujo a ver en ellas sucesos de carácter eruptivo.

Lo cierto es que las observaciones al respecto permiten deducir proporciones y velocidades, que no cuadran en ninguna comparación

Figura 4

con sucesos eruptivos en nuestro globo, aun cuando consideremos para el sol condiciones que correspondan a su tamaño y a su grado de evolución.

Podemos concluir de las observaciones, con alguna seguridad, que las manchas revelan perturbaciones violentas en la superficie solar; pero no sabemos nada sobre las causas de estas revoluciones.

La periodicidad con que aumentan y disminuyen las manchas, como lo revelan las figuras 3, 4 y 5, es tal vez una llave para este misterio solar.

El cuadro siguiente da los años de los máximos y de los mínimos

de las manchas solares desde el año 1910. El término medio de los períodos resulta 11,15 años para los máximos y 11,19 años para los mínimos: el período en general dura luego 11.17 años. Los períodos entre sí varían sin embargo notablemente, pues el período mas corto fué el de 1829,9 a 1837,2, el que no duró sino 7,3 años y el período más largo se registró entre 1788,1 y 1805,2, con la duración de 17,1 años.

Cuadro de los períodos de la acción solar

Años de los mínimos	Largo del período	Años de los máximos	Largo del período
1610.8	8.2 años	1615.5	10.5 años
1619.0	15.0	1626.0	13.5
1634.0	11.0	1639.5	9.5
1645.0	10.0	1649.0	11.0
1655.0	11.0	1660.0	15.0
1666.0	13.5	1675.0	10.0
1679.5	10.0	1685.0	8.0
1689.5	8.5	1693.0	12.5
1698.0	14.0	1705.5	12.7
1712.0	11.5	1718.2	9.3
1723.5	10.5	1727.5	11.2
1734.0	11.0	1738.7	11.6
1745.0	10.2	1750.3	11.2
1755.2	11.3	1761.5	8.2
1766.5	9.0	1769.7	8.7
1775.5	9.2	1778.4	9.7
1784.7	13.0	1788.1	17.1
1798.3	12.3	1805.2	11.2
1810.6	12.7	1816.4	13.5
1823.3	10.6	1829.9	7.3
1833.9	9.6	1837.2	10.9
1843.5	12.5	1848.1	12.0
1856.0	11.2	1860.1	10.5
1867.2	11.7	1870.6	13.3
1878.9	10.7	1883.9	10.2
1889.6	12.1	1894.1	12.3
1901.7	11.9	1906.4	11.2
1913.6	10.0	1917.6	
1923.6			

Fijándonos, además, en las curvas A de las figuras 3, 4 y 5, que representan gráficamente la acción solar, o sea el número relativo de

las manchas, vemos que hay años de máximo muy pronunciado, y otros que menos se destacan.

Del estudio de las curvas surge la idea de que los períodos de 11,17 años pudieran estar dominados por períodos de mayor duración, que, según Schuster y Lockyer, son de 33 a 35 años aproximadamente. Wolf cree, además, poder notar un período de 55 años y Schuster dos períodos menores de 4,8 y 8,36 años.

El tiempo transcurrido en la observación de las manchas es, sin embargo, relativamente corto para pronunciarse con seguridad al res-

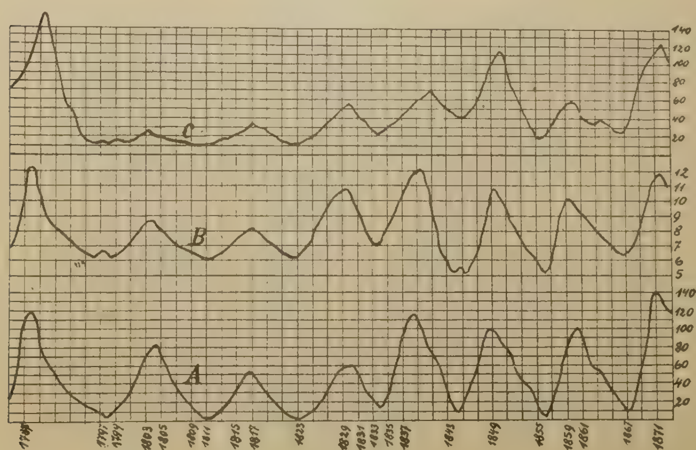


Figura 5

pecto, pues no ha pasado sino un siglo desde que H. Schwabe, en Dessau, empezó á dedicarle la atención, expresándose en 1843 primero sobre la periodicidad.

Los períodos supuestos de 33 a 35 años y de 55 años permiten reconocer inmediatamente el múltiplo del período de 11,17 años. También los períodos todavía hipotéticos de 4,8 y 8,36 años conducen, por la simple multiplicación por 7 y 4 respectivamente, al período de 33 a 35 años.

El largo de los períodos en general es un argumento importante contra la hipótesis de que las manchas fueran originadas por sucesos evolutivos en el interior del sol, así es que se ha preferido por lo general las explicaciones que buscan la causa en la coacción de los

cuerpos de nuestro sistema planetario, aun cuando hasta ahora no ha sido posible poder formar una teoría aceptable.

Así se ha buscado una relación entre los períodos de la acción solar y las revoluciones sinódicas de Venus-Tierra, que se producen en el transcurso de 1,6 años terrestres.

Tres, cinco y siete revoluciones sinódicas dan tiempos de 4,8, 8 y 11,2 años respectivos, vale decir, tiempos que coinciden aproximadamente con los pequeños períodos de Schuster y el período principal undecimal. Pero esto es todo.

Luego se ha mirado hacia Júpiter, nuestro hermano mayor en el sistema, cuyo tiempo de revolución es de 11,86 años terrestres, quiere decir « casi » igual al período principal de las manchas.

La diferencia existente entre el período de las manchas y la revolución de Júpiter, que no es sino de 0,7 años, sería sin embargo suficiente para hacerse notar en los 28 períodos constatados por el cuadro que más arriba dimos. Pero la aproximada coincidencia de los tiempos no deja de ser algo sugerente, tanto más cuando no se puede omitir la acción de ninguno de los planetas desde el momento en que se admite la influencia de uno de ellos.

Merece atención la teoría del profesor L. Zehnder en Basel, quien parte de los efectos mecánicos en nuestro sistema solar, los que resultan por la existencia de las masas de Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, dejando sin consideración las de los planetas inferiores por su efecto ínfimo.

Por más que se reconozca al Sol como astro central, como rey dominante en nuestro sistema, no por esto debe olvidarse que también para él rigen ciertas leyes fundamentales y, que, por lo tanto, el Sol no puede substraerse a ciertas influencias, que ejercen especialmente los planetas superiores sobre su posición.

Júpiter, cuya masa alcanza aproximadamente un milésimo de la masa solar, es luego un cuerpo nada despreciable en nuestro sistema y hasta Saturno, cuya masa representa más o menos un tercio de la de Júpiter, debe ser considerado como planeta de influencia. ¿ Qué resulta de todo esto ? Resulta simplemente que, considerando las masas del Sol y de Júpiter y su distancia, el centro de gravedad queda en cifra redonda 740.000 kilómetros fuera del centro solar. Esto es un simple hecho. Y Saturno consigue un desplazamiento del centro de gravedad en 407.000 kilómetros, de modo que Júpiter y Saturno en conjunción desplazan el centro de gravedad a 1.147.000 kilómetros fuera del centro del Sol.

Urano y Neptuno son notablemente menores, pero debido a sus grandes distancias, el desplazamiento del centro común es de 125.000 y de 233.000 kilómetros respectivamente, de modo que el centro común del Sol con los planetas superiores puede distanciar al centro del sol hasta 1.505.000 kilómetros, caso que sucede cuando los cuatro grandes planetas se encuentran en su conjunción, o al menos muy cerca de ella. Cuando sólo Saturno, Urano y Neptuno se encuentran en conjunción o cerca de ella y al mismo tiempo en oposición a Júpiter, el centro común de los 5 cuerpos está cerca del centro del Sol, pues resulta

$$740.000 - (407.000 + 125.000 + 233.000) = -25.000 \text{ km},$$

vale decir, un desplazamiento muy pequeño. El centro común en nuestro sistema solar varía luego continuamente y puede alejarse del centro del Sol en más del diámetro del Sol mismo (1.391.000 km).

Ahora bien, Zehnder determinó para el intervalo comprendido entre los años de 1610 a 1946 de año a año las desviaciones del centro común, tomando en consideración las verdaderas posiciones de los planetas superiores, o sean las efemérides.

Claro es que también el Sol está sometido a la ley general, que rige con relación a los movimientos al rededor de un foco central, y por muy complicado que sea el movimiento de los cinco cuerpos de un sistema, la misma variación del centro común da una idea general sobre el movimiento solar, el que no puede ser un movimiento de traslación rectilínea, sino un movimiento en curvas cicloidales de orden superior. El estudio de las desviaciones del centro común, o lo que es lo mismo del Sol con respecto al centro del sistema, suministra detalles sumamente interesantes.

Relacionando entre sí los tiempos seguidos, que marcan valores máximos de las oscilaciones y también los que corresponden a valores mínimos, se repiten en ambos casos períodos bien pronunciados de 11,9 años, 39 años, 100 y 178,7 años con muy pequeñas diferencias en más o en menos.

El período de 11,9 años corresponde bien al tiempo de revolución de Júpiter y el período de 39 años al doble del período de conjunción de Júpiter y Saturno, que es de 19,8 años.

En el período de 100 años vemos cinco intervalos de conjunción de Júpiter y Saturno y nueve de tales intervalos nos dan los períodos de 178,7 años.

Vemos de esto con claridad que las oscilaciones en el movimiento

solar reflejan principalmente la influencia de Júpiter con Saturno.

Ahora bien, si efectivamente hubiera una causalidad entre el juego de movimientos planetarios y las manchas solares, los períodos de la acción solar tendrían que encuadrarse dentro de los períodos largos, de modo que el tiempo de revolución de Júpiter no marcaría sino el compás general de los períodos solares, mientras que el ajustamiento de ellos sería determinado por los períodos de 100 y de 178,7 años.

En este orden de ideas, el período principal de la acción solar tendría que tener

$$\frac{100}{9} = 11,11 \text{ años},$$

respectivamente :

$$\frac{178,7}{16} = 11,17 \text{ años}.$$

Vemos una coincidencia sorprendente con los períodos realmente existentes.

Fijándose ahora en los tiempos en que han acaecido los máximos y los mínimos de las manchas, se nos presenta una singularidad notable. Los máximos siempre se producen, cuando el movimiento del Sol está en dirección hacia afuera, es decir, entre una variación mínima y la siguiente máxima del centro común. Y los mínimos de las manchas se producen siempre, cuando el Sol cae de nuevo hacia el centro ideal, que tenemos al coincidir el centro del Sol con el centro común. Los mínimos se producen pues al oscilar el Sol de un desplazamiento máximo a uno mínimo del centro común.

El resultado de estas observaciones asume una importancia esencial al considerar al mismo tiempo el fenómeno de la luz zodiacal. Según Seeliger (1906) tenemos en este fenómeno luz solar reflejada por materia cósmica (polvo cósmico, meteoros), repartida en un espacio comparable a un lente biconvexo, cuyos bordes alcanzan tal vez la órbita de Marte. Las investigaciones espectrales de Fath confirman la hipótesis de Seeliger. Éste comprobó además, por cálculos, que la existencia de esta materia supuesta bastaría absolutamente para producir la conocida anomalía en el movimiento de Mercurio (movimiento perihélico) (1).

(1) De las investigaciones más recientes resulta que la sorprendente concordancia entre el movimiento perihélico observado de Mercurio y el calculado por

Aceptada la hipótesis de la existencia de masas finas cósmicas al rededor del Sol, sometidas, como se comprende, a las leyes generales que rigen en nuestro sistema, las oscilaciones del Sol, en su camino hacia un punto cerca de la Lira, deben influir notablemente sobre las masas o meteoros próximos. Debido a la inmensa fuerza de atracción que obra sobre ellos cerca del Sol, la revolución al rededor del astro central sólo les es posible, teniendo, ellos, enormes velocidades tangenciales. Recordamos a este respecto que el cometa 1843, I, desarrolló cerca de su perihelio una velocidad de 570 kilómetros por segundo. Esta indicación debe dar una idea con respecto al valor de las velocidades alcanzadas cerca del Sol.

El movimiento del Sol hacia su desviación máxima lateral tiene indudablemente un fuerte efecto perturbador, puesto que el astro no sólo corta el camino a los meteoros próximos, sino que aumenta también su fuerza de atracción sobre todos aquellos a que se acerca por la diminución de la distancia, cuyo efecto vemos en su cuadrado. La perturbación originada por el aumento notable de la fuerza de gravitación debe exteriorizarse en un número muy elevado de caídas de meteoros.

Al retirarse el Sol de nuevo hacia el centro ideal, la distancia, con relación a los meteoros del mismo lado, aumenta la fuerza de gravitación disminuye y las órbitas de los meteoros serán más abiertas, más tendidas. Claro es que de esta nueva perturbación resultan efectos completamente contrarios a la anterior, vale decir, el número de las caídas de meteoros debe llegar a su mínimo.

Esto es, en rasgos generales, la teoría de Zehnder, quien sostiene, a base de sus investigaciones, que las manchas solares son fenómenos producidos, en primer lugar, por meteoros que caen con velocidades enormes sobre el Sol, causando en la superficie todas aquellas perturbaciones de carácter mecánico-físico y magnético que se observan.

Einstein probablemente no es del todo segura, por cuanto se ha constatado la intromisión de errores en los resultados de observación por Newcomb. La concordancia existe, sí, en el sentido cualitativo, pero no del todo en el sentido cuantitativo (véase : *Die Idee der Relativitätstheorie,* von Prof. HANS THIRRING, Wien, 1922, y también *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften,* Bd., III, Springer, Berlin, 1924). La coacción de materia repartida en el espacio de los planetas inferiores según la hipótesis de Seeliger, en el sentido del movimiento perihélico de Mercurio, queda completamente dentro del marco de la probabilidad.

Los períodos constatados serían consecuencias de las oscilaciones del camino solar, originadas principalmente por los dos planetas Júpiter y Saturno.

La teoría bosquejada es del todo interesante y la concordancia de los períodos desarrollados por el movimiento solar con los de las manchas es sin duda alguna muy sugestiva. No obstante esto quedan siempre todavía abiertas muchas preguntas: así, por ejemplo, la rareza de manchas en la zona ecuatorial como también el orden de aparición de las manchas en general, pues después de cada mínimum de ellas, las primeras del nuevo período aparecen siempre en mayores latitudes heliográficas (hasta 40°), y a medida que aumentan en número aparecen también en latitudes menores. El hecho de que las manchas a mayores latitudes que 40° son rarísimas no es sin embargo ninguna prueba contra la teoría de Zehnder, puesto que ignoramos el espesor del lente biconvexo de materia, que nos produce por reflejos la luz zodiacal.

Aceptando ciertas analogías con el anillo de Saturno, Zehnder calcula para el espesor del lente 700.000 kilómetros, vale decir, la mitad del diámetro del Sol, dando así efectivamente una explicación para la falta de manchas en latitudes superiores.

Muy enigmático es, sin embargo, el hecho de que el número de las manchas que nacen, por decirlo así, bajo la mirada del observador, es ínfimo en comparación al número de aquellas que aparecen ya desarrolladas en el borde este del Sol. En el observatorio solar de Kassel se han hecho, desde 1905 hasta 1911, 2200 fotografías del Sol, resultando del estudio de ellas que sólo el 8 por ciento de las manchas nacieron frente a la Tierra y 92 por ciento del lado opuesto del Sol. Según Philipp Carl, Munich, esta singularidad fué ya observada por el arriba mencionado Schwabe, entre 1828 y 1848, pero parece que hasta ahora no se ha dado importancia a ella. ¿ Es tal vez que la Tierra misma tenga una influencia ? Recordamos a este respecto que siete períodos de conjunción Tierra-Venus dan un período de las manchas solares.

Sea como sea, vemos con claridad que el fenómeno de las manchas es misterioso, pero no puede negarse la probabilidad de una coacción e influencia de los planetas. El tiempo de la observación ha sido muy corto hasta hoy y el futuro traerá seguramente mayores aclaraciones sobre este misterio solar.

Existiendo ahora una relación íntima entre las perturbaciones solares y las magnéticas terrestres, surge de inmediato la pregunta de

si puede constatarse una relación directa con las variaciones del clima en la Tierra.

En cuanto a la temperatura media parece existir una influencia,

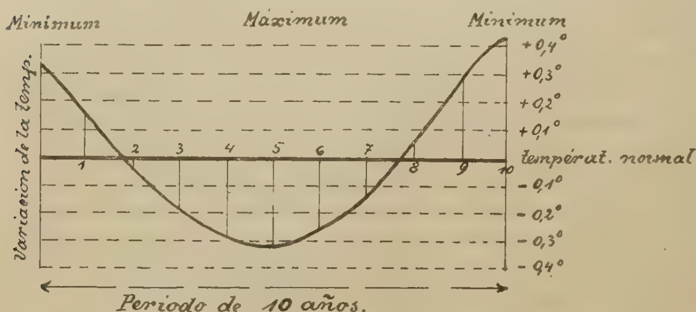


Figura 6

aun cuando resulta muy pequeña. Según Köppen ha variado la temperatura en los trópicos durante un período solar como lo demuestra el siguiente diagrama (fig. 6).

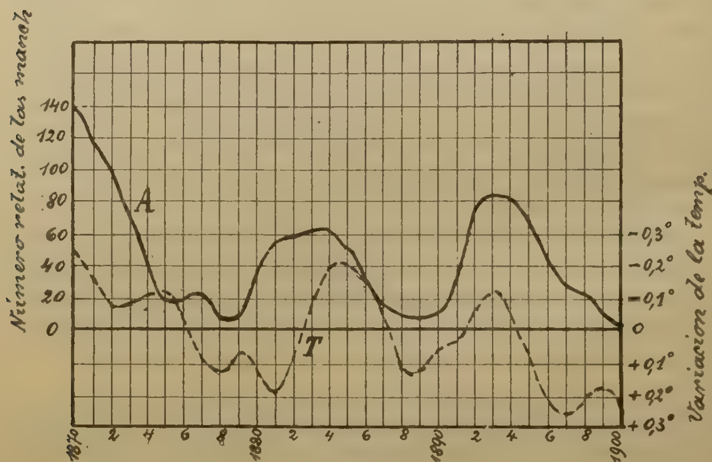


Figura 7

Se ve que la variación, con referencia a la temperatura media normal, no alcanza en este período sino aproximadamente 3 4 de un grado.

M. Nordmann estudió la relación entre la acción solar y la variación de la temperatura terrestre durante un intervalo de tiempo de 30 años.

La figura 7 representa los resultados de Nordmann en combinación con la curva de la actividad solar en el mismo intervalo según Wolf. Se ve con claridad que la curva de la variación de temperatura sigue por lo general bastante bien a la curva de la actividad solar, en el sentido de que a los tiempos de actividad máxima solar corresponde una pequeña diminución de la temperatura terrestre y a los tiempos de los mínimos un pequeño aumento. La variación de temperatura constatado por Nordmann en el intervalo indicado alcanza más o menos 0°5 C.

Por lo general, existen muchos factores terrestres que influyen sobre el tiempo, de manera que resulta algo difícil determinar con absoluta seguridad el efecto de las perturbaciones solares por sí solas sobre los sucesos meteorológicos terrestres.

En este sentido es de sumo interés el estudio de la estadística.

Wolf encontró una relación directa entre el número de los ciclones índicos y de las Antillas y el número de las manchas solares, como lo demuestra el cuadro siguiente:

Número de ciclones	Número relativo de manchas solares
1-2	17
3	59
4	62
5	70
6-7	80
8	88

Muy instructivos son los datos estadísticos de Brückner, que abarcan casi dos siglos con referencia a las variaciones de la temperatura y de las caídas de lluvias, y casi tres siglos y medio con referencia a las variaciones observadas en la extensión de los ventisqueros.

Damos en los dos cuadros siguientes los resultados de las investigaciones de Brückner:

Épocas húmedas	Aumento de lluvia para toda la Tierra por año	Años en que se observó un máximo en el nivel de los lagos y mares continentales	Épocas frías	Disminución de la temperatura media para toda la Tierra	Años en que el avance de los ventisqueros alcanzó un máximo
Años	Por ciento		Años	Grados	
»	»	»	»	»	1592
»	»	»	»	»	1630
»	»	»	»	»	1675
»	»	»	»	»	1712
1736-1740	+9	1740	1736-1740	—0.43	1735
1771-1775	7	1780	1766-1770	0.43	1767
1806-1810	3	1820	1811-1815	0.46	1814
1846-1850	3	1850	1836-1840	0.39	1835
1876-1880	+7	1880	1881-1885	—0.08	1875

Épocas secas	Disminución de lluvia para toda la Tierra por año	Años en que se observó un mínimo en el nivel de los lagos y mares continentales	Épocas de calor	Aumento de la temperatura media para toda la Tierra
Años	Por ciento		Años	Grados
1751-1756	—6	1760	1745-1750	+0.45
1785-1800	4	1800	1791-1795	0.46
1826-1830	8	1835	1821-1825	0.56
1858-1865	5	1865	1851-1855	0.11
1891-1895	—6	»	1890-1895	+0.11

Del estudio de los cuadros resulta que los años medios de cada época, es decir los años en que las épocas culminan, se presentan con intervalos de 35 años por término medio. Vemos luego en tal período terrestre un poco más que el triple de un período solar, pero al comparar los años medios con los años de la acción máxima y mínima solar, resalta a la vista que, indudablemente, rigen todavía otras influencias y factores, pues la coincidencia sólo es exacta en algunos casos.

Según Hann se manifiestan fluctuaciones del clima entre períodos húmedos y períodos secos, cuyos años de culminación siguen de acuerdo con el cuadro siguiente :

Períodos húmedos	Períodos secos
1738	1753
1773	1788
1808	1823
1843	1859
1878	1893
1913	(1928)

Según las investigaciones de Brückner tenemos que buscar la causa de la falta de coincidencia en factores terrestre-atmosféricos (movimientos atmosféricos, variación de la presión).

La diferencia de temperatura entre la época fría de 1736-1740 y la de calor de 1821-1825 no es más que de un centigrado, pero la diferencia en aguas de lluvia es cerca del 15 por ciento por año. Tenemos que tener presente que las experiencias meteorológicas indican para el agua evaporada en las regiones ecuatoriales y transportada luego hacia las altas latitudes geográficas, la inmensa cantidad de 660 billones de toneladas, sin contar el agua que evapora en las regiones ecuatoriales y cae de nuevo allá mismo en forma de lluvia, sin experimentar mayor transporte. Esta cantidad de agua equivale a la de un mar cuya extensión superficial es como la República Argentina, con una profundidad de 220 metros. Y el nivel de este mar oscilaría entre las dos épocas señaladas en 33 metros. ¡Tan inmenso es el efecto mecánico, originado por los fenómenos solares!

Tenemos indudablemente razón de buscar el origen de todas estas variaciones en causas cósmicas, y, si el trabajo de Zehnder expone con suficiente claridad la probabilidad de la coacción de los planetas superiores en el juego de las perturbaciones solares, que a su vez se reflejan inmediatamente en perturbaciones magnéticas terrestres, menester es convencerse de que nuestro sistema planétario representa un mecanismo de finísimo engranaje que no conocemos sino a medias.

No cabe duda de que los investigadores del futuro tienen a este respecto todavía amplísimos campos de acción.

NOTICIAS VARIAS

Congreso internacional de Geología

Durante los meses de mayo y junio de 1926 se celebrará en Madrid el XIV° Congreso geológico Internacional.

Este Congreso ha de resultar de importancia verdaderamente excepcional, pues han de acudir los más eminentes geólogos, geógrafos e ingenieros y estudiarán nuestras grandes riquezas mineras, muchas de ellas todavía sin explotar y casi desconocidas, a pesar de su importancia.

Entre los temas que discutirá el Congreso figuran, hasta ahora, los siguientes: *Las reservas mundiales de fosfatos y piritas, Geología del Mediterráneo, La Fauna cambriana y siluriana, La geología de África y sus relaciones con la de Europa, Los vertebrados terciarios, Los pliegues hercinianos, Los foraminíferos del terciario, Las teorías modernas de metalogenia, El vulcanismo, Estudios geofísicos.*

Se están recibiendo ya interesantes trabajos relativos a esos temas y a otros de cuestiones análogas, relacionados con la geología mundial.

Se verificarán excursiones a Sevilla, Córdoba, Algeciras, Ronda, Norte de Marruecos, Granada, Almería, Linares, Huelva, Burgos, Bilbao, Asturias, Cataluña, Toledo, Escorial e Islas Baleares y Canarias, visitando los puntos más interesantes bajo los aspectos geológico, minero, industrial y artístico.

Cuantos deseen formar parte de este Congreso o adquirir noticias referentes al mismo, deben dirigirse al Secretario de la Junta organizadora, Instituto Geológico, Plaza de los Monteses, 2, Madrid.

ÍNDICE GENERAL

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO

BIBLIOGRAFÍA